



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA–IMECC

ODAIR JOSÉ TEIXEIRA DA FONSECA

CHAMADO DE ALARME: UMA NOVIDADE  
EVOLUTIVA

ALARM CALL: AN EVOLUTIONARY NOVELTY

CAMPINAS

2017

ODAIR JOSÉ TEIXEIRA DA FONSECA

## CHAMADO DE ALARME: UMA NOVIDADE EVOLUTIVA

## ALARM CALL: AN EVOLUTIONARY NOVELTY

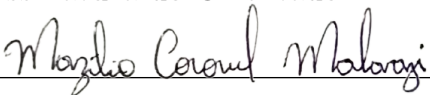
Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

**Orientador:** Mazílio Coronel Malavazi

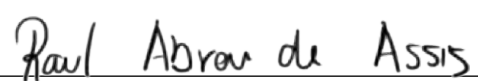
**Coorientador:** Raul Abreu de Assis

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL  
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ODAIR  
JOSÉ TEIXEIRA DA FONSECA, E ORIENTADA PELO  
PROF. DR. MAZÍLIO CORONEL MALAVAZI.

**Assinatura do Orientador**



**Assinatura do Coorientador**



CAMPINAS

2017

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** Não se aplica.

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F733c Fonseca, Odair José Teixeira da, 1984-  
Chamado de alarme : uma novidade evolutiva / Odair José Teixeira da  
Fonseca. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Mazílio Coronel Malavazi.

Coorientador: Raul Abreu de Assis.

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais. 2. Equações de reação-difusão. 3. Estabilidade.  
4. Reação de alarme. 5. Métodos numéricos. I. Malavazi, Mazílio  
Coronel, 1983-. II. Assis, Raul Abreu de, 1978-. III. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV.  
Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Alarm call : an evolutionary novelty

**Palavras-chave em inglês:**

Differential equations

Reaction-diffusion equations

Stability

Startle reaction

Numerical methods

**Área de concentração:** Matemática Aplicada e Computacional

**Titulação:** Mestre em Matemática Aplicada e Computacional

**Banca examinadora:**

Mazílio Coronel Malavazi [Orientador]

Rodney Carlos Bassanezi

Moiseis dos Santos Cecconello

**Data de defesa:** 26-06-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada e Computacional

**Dissertação de Mestrado defendida em 26 de junho de 2017 e aprovada  
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). MAZÍLIO CORONEL MALVAZI**

**Prof(a). Dr(a). RODNEY CARLOS BASSANEZI**

**Prof(a). Dr(a). MOISEIS DOS SANTOS CECCONELLO**

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

## DEDICATÓRIA

*Aos meus pais Graciliano e Rita,  
por me ensinarem que a beleza da  
vida está na simplicidade das coi-  
sas.*

*Amo Vocês...*

## AGRADECIMENTOS

- À Deus por me conceder a graça de alcançar mais este objetivo.
- À minha família, em especial aos meus pais e meus irmãos, pelo apoio e incentivo.
- À Valdenice, Rosemberg e Victória pela carinhosa acolhida em sua casa durante minhas idas e vindas à Campinas. Sem o apoio de vocês tudo seria mais difícil.
- Em especial ao meu Orientador Professor Dr. Mazílio Coronel Malavazi pelas pacientes contribuições durante todo o meu processo de formação acadêmica, sempre acreditando e me incentivando a ir além. Newton disse “Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes”. Dentre todos os gigantes que me apoiaram, sem dúvida alguma, Mazílio foi o maior e mais importante. Muito obrigado.
- A meu Coorientador Professor Dr. Raul Abreu Assis pelas inúmeras contribuições prestadas no decorrer deste trabalho.
- Às professoras Fatimarlei Cargnin Guerreiro e Valdenice Martins Serqueira, principais responsáveis pela minha inserção no meio acadêmico. Serei eternamente grato.
- Aos professores, assistentes, secretaria de pós-graduação e colegas do IMECC pelas contribuições enriquecedoras para meu crescimento acadêmico e pessoal.
- Ao departamento de Matemática da UNEMAT pelo apoio e incentivo.
- Aos amigos de longa data, em especial ao “Manolo” Jhone de Souza Pereira, parceiro de luta e estudos durante o transcorrer do mestrado.
- À grande amiga Patrícia Frighetto que sempre me encorajou a encarar esse desafio.
- À vida do meu amor, Deise, que presenciou e vivenciou de perto parte dessa conquista, sempre com as palavras certas nas horas incertas.

## Resumo

Em ecologia, a relação predador-presa constitui um papel importante que “molda” as interações entre espécies. Nesse processo, torna-se essencial à população de presas desenvolver mecanismos antipredatórios, dentre os quais destacamos o comportamento de chamado de alarme, nosso objeto de estudo. O modelo apresentado foi desenvolvido a partir de conceitos de equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais (equação de difusão), bem como métodos de aproximações numéricas, buscando compreender se a distribuição no espaço modificaria as relações de seleção entre indivíduos alarmistas e não-alarmistas, conforme sugerido por Trivers (1971). Por fim, fazemos uma discussão sobre os resultados obtidos e possíveis direções de estudos.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais; Equação de Difusão; Estabilidade; Chamados de Alarme; Métodos Numéricos.

## Abstract

In ecology, the predator-prey relationship forms an important role that “shapes” the interactions between species. In this process, it is essential for the population of prey to develop anti-predatory mechanisms, among which we highlight the behavior of the so-called alarm, our object of study. The model presented was developed from concepts of ordinary differential equations, partial differential equations (diffusion equation), as well as methods of numerical approximations, trying to understand if the distribution in space would modify the relations of selection between alarmist and non-alarmist individuals, As suggested by Trivers (1971). Finally we have a discussion about the results obtained and possible directions of studies.

**Keywords:** Differential Equations; Diffusion Equation; Stability; Alarm Calls; Numerical Methods.



# Sumário

<b>1 Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2 Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>13</b>
2.1 Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)	13
2.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	14
2.2 Existência e Unicidade	16
2.3 Modelagem Matemática com EDO	21
2.3.1 Crescimento de Microorganismos	22
2.3.2 Crescimento Bacteriano em um Quimiostato	26
2.3.3 Formulação do Modelo	27
2.3.4 Taxa de Saturação do Consumo de Nutrientes	30
2.3.5 Análise Dimensional das Equações	31
2.3.6 Soluções Estacionárias	33
2.3.7 Estabilidade e Linearização	35
2.3.8 Solução de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares a Coeficientes Constantes	37
2.3.9 Estabilidade de um Estado de Equilíbrio	42
2.3.10 Estabilidade dos Estados Estacionários no Quimiostato	45
2.3.11 Critério de Routh-Hurwitz	48
<b>3 Equação da Difusão</b>	<b>52</b>
3.1 Equação de Difusão	52
3.1.1 Fluxo e Fluência	52
3.1.2 Equação de Continuidade Unidimensional e Tridimensional	53
3.1.2.1 Equação Unidimensional	53

3.1.2.2	Equação Tridimensional . . . . .	54
3.1.2.3	A Forma Integral da Equação de Continuidade . . . . .	56
3.1.2.4	A forma Diferencial da Equação de Continuidade . . . . .	57
3.2	Difusão: Leis de Fick . . . . .	59
3.2.1	Segunda Lei de Fick . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Métodos Numéricos</b>	<b>65</b>
4.1	Método das Diferenças Finitas . . . . .	65
4.2	Método da Série de Taylor . . . . .	70
4.3	Métodos de Runge-Kutta . . . . .	71
4.4	Soluções Numéricas de Equações Diferenciais Parciais . . . . .	75
4.4.1	O Método de Diferenças Finitas . . . . .	76
4.4.1.1	Definição da Malha . . . . .	76
4.4.1.2	Discretização do Operador Laplaciano . . . . .	77
4.4.2	Crítério das Linhas . . . . .	81
4.5	Estabilidade e Convergência de Métodos Numéricos . . . . .	83
4.5.1	Estabilidade, Consistência e Convergência de Métodos Numéricos para EDO's . . . . .	83
4.5.2	Estabilidade de Esquemas Numéricos para EDP's . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Uma Aplicação: O Problema de Chamado de Alarme</b>	<b>90</b>
5.1	O Problema Biológico . . . . .	90
5.2	Modelagem: Modelo EDO, Modelo EDP . . . . .	97
5.2.1	O Comportamento de Alarme . . . . .	97
5.2.2	Modelo EDO com Crescimento Logístico . . . . .	98
5.2.3	Modelo EDP: Distribuição Espacial com Crescimento Logístico . . .	101
5.3	Simulações e Análise . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>109</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>110</b>

# Introdução

Ao modelarmos um fenômeno ou um experimento qualquer, obtemos com muita frequência, equações que envolvem as variações das quantidades (variáveis) presentes consideradas essenciais. Assim, as leis que regem um fenômeno podem ser descritas por equações de variações. Se essas variações são instantâneas, e tal fenômeno se desenvolve de forma contínua, essas equações de variações são chamadas de equações diferenciais (Bassanezi e Ferreira Jr., 1988).

Segundo Okubo e Levin (2013), um tratamento matemático é indispensável para que a dinâmica dos ecossistemas seja analisada e prevista quantitativamente. Nesse sentido, as equações diferenciais podem ser utilizadas para descrever vários fenômenos em várias áreas do conhecimento como a física, a biologia, a química, a economia, dentre outras.

Nesse trabalho, realizamos uma revisão dos conceitos que englobam as teorias das equações diferenciais ordinárias, da equação de difusão (EDP), dos métodos numéricos e uma aplicação ao problema biológico de chamado de alarme com o intuito de investigar a relação predador-presa.

A predação é um processo pelo qual um animal gasta algum esforço para localizar uma presa viva e, além disso, gasta outro esforço para mutilá-la ou matá-la (Curio, 1976).

Portanto, em ecologia a relação predador-presa desempenha um papel fundamental no sentido de “moldar” as formas de interações entre espécies, de forma que, pode ser considerado um fator importante de seleção natural.

Nesse processo de interações entre presa e predador, torna-se essencial à população de presas desenvolver mecanismos de anti-predação, ou seja, desenvolver habilidades que lhes permitam maior chance de sobrevivência durante possíveis encontros com seus potenciais predadores.

Mais precisamente, um comportamento antipredatório tem o papel de evitar possíveis ataques de predadores. Em alguns casos, estes comportamentos consistem na emissão

de sinais que alertam os demais indivíduos presas quanto à presença de um predador ou, até mesmo, com o intuito de mostrar ao predador que o mesmo foi identificado, desencorajando-o da investida. Tais sinais são denominados *chamados de alarme* e podem ser visuais, auditivos ou químicos (Caro, 2005).

Muitas pesquisas têm sido dedicadas ao estudo da evolução dos chamados de alarme, bem como o desenvolvimento de modelos matemáticos que permitam fazer uma análise qualitativa sobre o comportamento de alarme. Ou seja, modelos que descrevem uma dinâmica em que seja possível avaliar os benefícios e riscos para o indivíduo que emite o alerta e para a população presa. Aqui destacamos o trabalho de Maynard Smith<sup>1</sup> (Smith, 1965), que modela a probabilidade de predação como uma fração da população de alarmistas.

Assis e Malavazi (2015) estudam um processo de seleção natural com interação nos níveis do indivíduo e da população, formulando um modelo para o problema de chamado de alarme em uma população de indivíduos alarmistas e não-alarmistas. Nesse trabalho, os autores mencionam a necessidade de incluir uma distribuição espacial para que seja possível investigar as conclusões de Trivers (Trivers, 1971) de que a seleção irá favorecer os indivíduos alarmistas mesmo em situações de vantagem para indivíduos não-alarmistas.

Nesse sentido, o objetivo deste trabalho consiste em apresentar um modelo com distribuição espacial para uma população hipotética composta por indivíduos alarmistas e não-alarmistas. Na formulação do modelo consideramos apenas uma variável espacial, ou seja, uma distribuição espacial unidimensional. Quanto às hipóteses, consideramos as mesmas do modelo de Assis e Malavazi (2015).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos uma revisão de literatura sobre os conceitos que englobam a teoria das equações diferenciais ordinárias. O capítulo 3 é dedicado à dedução da equação de difusão através das leis de Fick. No capítulo 4 são discutidos os conceitos de métodos numéricos. No capítulo 5 apresentamos o problema biológico de chamado de alarme, bem como o modelo matemático para o problema. Também foram feitas simulações numéricas para o modelo em questão e uma análise dos resultados obtidos. O capítulo 6 é reservado para uma síntese dos resultados e direcionamentos de possíveis estudos futuros.

---

<sup>1</sup>veja o modelo 5.126 discutido no capítulo 5.

## 2 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma equação diferencial é uma expressão que relaciona uma função com suas derivadas. Se a função depender de apenas uma variável independente, temos uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Se a função depender de mais de uma variável independente, temos uma Equação Diferencial Parcial (EDP).

A ordem de uma equação diferencial é o grau mais alto da derivada que nela aparece.

### 2.1 Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)

Os resultados apresentados nessa seção podem ser encontrados em livros clássicos da literatura, dentre os quais ressaltamos, Keshet (2005), Figueiredo (2010), Doering e Lopes (2005) e Sotomayor (1979).

Conforme Castro Jr. (2009), as equações diferenciais ordinárias surgiram de forma natural com a invenção do cálculo por Newton e Leibniz. Essencialmente, tais equações consistem em uma relação entre curvas definidas em intervalo da reta com suas derivadas. Assim, uma equação diferencial ordinária é uma expressão que relaciona uma função que depende de uma única variável independente com suas derivadas, ou seja, é uma equação da forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

Se  $F$  não for constante com relação a última variável, então a ordem da equação (2.1) é  $n$ , o grau mais alto das derivadas que aparecem na equação.

A solução de uma EDO é uma função  $y = f(x)$  que satisfaz a equação para cada valor da variável independente.

Uma EDO é dita linear se a função  $F$  em (2.1) é linear com respeito a variável dependente  $y$  e suas derivadas, isto é,  $F$  é do primeiro grau em  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ . Assim,

uma equação diferencial linear é um caso especial de EDO's e pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x) \quad (2.2)$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  e  $g$  são funções somente de  $x$ . O caso em que os coeficientes ( $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ ) são constantes, é de uma importância particular para análise de estabilidade e, a princípio, é possível “resolvê-las” completamente. A equação (2.2) é chamada homogênea quando  $g(x) = 0$ .

Uma EDO que não é linear é dita não-linear. Portanto, uma EDO não-linear não pode ser escrita como (2.2).

### 2.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem tem a seguinte forma

$$F(x, y, y') = 0.$$

Se possível, em vez de lidarmos com equações que envolvem uma função e suas derivadas, escrevemos uma equação diferencial de primeira ordem como:

$$y' = f(x, y) \quad (2.3)$$

onde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida em um aberto  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ .

Uma solução da equação (2.3) é uma função diferenciável  $y = \phi(x)$  definida em um intervalo aberto  $I$  tal que

$$(x, \phi(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I \quad (2.4a)$$

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \forall x \in I. \quad (2.4b)$$

Ao estudarmos a equação diferencial (2.3) nos deparamos com alguns problemas básicos: i) dificuldade de encontrar soluções explícitas em termos de funções elementares. ii) estudo das propriedades geométricas da família de soluções, ou seja, um estudo qua-

litativo. iii) Existência e unicidade de solução do problema de valor inicial no estudo da equação diferencial (2.3).

Para compreensão desses problemas no caso geral (equação 2.3), torna-se importante “entender” o significado geométrico da equação diferencial. Note que a função  $f$  atribui a cada ponto de  $\Omega$  um número  $f(x, y)$ . Enquanto, a equação diferencial diz que a solução que passar por esse ponto tem inclinação igual a esse número (vide figura 2.1), ou seja,

$$\operatorname{tg} \theta = f(x, y)$$

onde  $\theta$  é o ângulo da tangente  $T$  à solução com o eixo  $x$ .

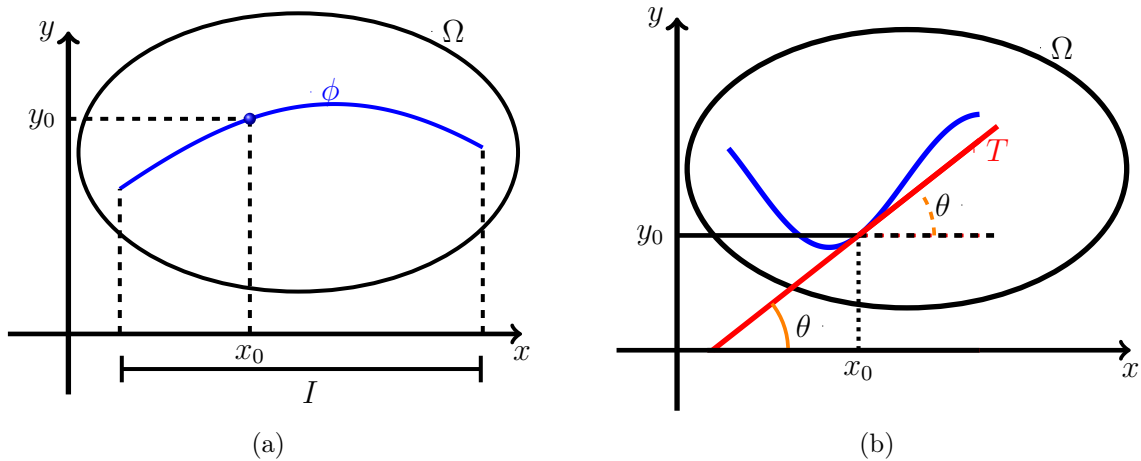


Figura 2.1: Inclinação  $\theta$  da tangente  $T$  à curva solução da equação (2.3). Adaptado de (Figueiredo, 2010).

Agora, se em cada ponto de  $\Omega$  considerarmos um vetor  $\vec{v}(x, y) = (1, f(x, y))$  que determina a tangente  $T$ , teremos então, um campo vetorial definido em  $\Omega$ . Assim, as soluções da equação (2.3) são as curvas cujos vetores tangentes em cada ponto  $(x, y)$  são  $\vec{v}(x, y)$ . Essas curvas são chamadas de *curvas integrais*.

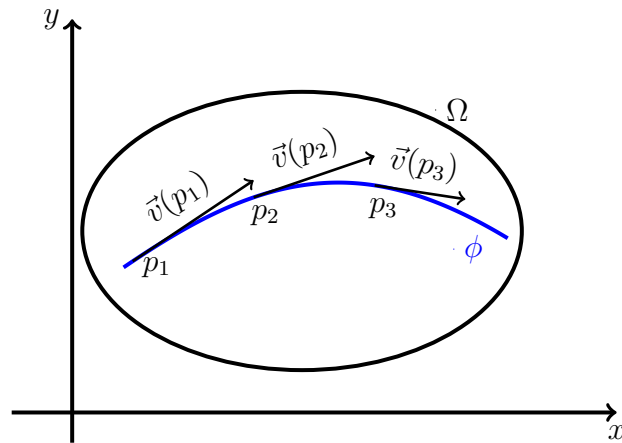


Figura 2.2: Vetores tangentes à solução (curva integral) da equação (2.3). Adaptado de (Figueiredo, 2010).

## 2.2 Existência e Unicidade

Esta seção é dedicada ao estudo de existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial (ou problema de *Cauchy*). Os resultados dessa seção estão fundamentados em Figueiredo (2010), Doering e Lopes (2005) e Sotomayor (1979).

**Definição 2.1.** (*Espaço Métrico*) Um espaço métrico é um conjunto  $M$  dotado de uma função real denominada métrica de  $M$ , que a cada par  $(x, y)$  de pontos de  $M$  associa um número real  $d(x, y)$  (a distância entre  $x$  e  $y$ ), tal que

- $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,  $\forall x, y, z \in M$

Uma sequência  $\{x_n\}$  de pontos de um espaço métrico  $M$  converge a um ponto  $x \in M$  se a sequência de distância  $d(x_n, x)$  convergir para zero. Neste caso, o ponto  $x \in M$  é chamado limite da sequência e podemos escrever

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Um espaço métrico  $M$  é dito **compacto** se toda sequência de pontos de  $M$  possui subsequência que converge para algum ponto de  $M$ .

Uma sequência  $\{x_n\}$  de pontos de um espaço métrico  $(M, d)$  é uma sequência de *Cauchy* se a distância  $d(x_n, x_m)$  for arbitrariamente pequena ao tomarmos  $n$  e  $m$  sufi-



cientemente grandes. Essencialmente, se para qualquer  $\epsilon > 0$  dado, existir um número inteiro  $N > 0$  tal que  $d(x_n, x_m) < \epsilon$  para todos  $n, m \geq N$ , ou, tal que  $d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$  para quaisquer  $n \geq N$  e  $p \in \mathbb{N}$ . Um espaço métrico no qual toda sequência de *Cauchy* converge é chamado **completo**.

**Definição 2.2.** *Sejam  $M, N$  espaços métricos. A aplicação  $f : M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a \in M$  quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existir  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  implica  $d(f(x), f(a)) < \epsilon$ .*

Uma aplicação é dita contínua quando for contínua em todos os pontos de seu domínio.

Dizer que  $f : M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a \in M$  significa que, dada qualquer bola  $B_1 = B(f(a); \epsilon)$  de centro  $f(a)$ , pode-se encontrar uma bola  $B = B(a; \delta)$ , de centro  $a$ , tal que  $f(B) \subset B_1$ .

Se  $M \subset \mathbb{R}$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $f$  ser contínua no ponto  $a \in M$  significa que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in M$  e  $a - \delta < x < a + \delta$  implicam  $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$ . Portanto,  $f$  transforma os pontos de  $M$  que estão no intervalo aberto  $(a - \delta, a + \delta)$  em pontos do intervalo aberto  $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ .

**Definição 2.3.** *Sejam  $M, N$  espaços métricos. Dada  $f : M \rightarrow N$ , suponhamos que exista uma constante  $K > 0$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$  quaisquer que sejam  $x, y \in M$ . Dizemos então que  $f$  é uma aplicação lipschitziana.  $K$  é chamada constante de Lipschitz de  $f$ .*

Toda aplicação lipschitziana é contínua. De fato, pois dado  $\epsilon > 0$ , tomemos  $\delta = \epsilon/K$ . Então  $d(x, a) < \delta$  implica  $d(f(x), f(a)) \leq K \cdot d(x, a) < K \cdot \delta = \epsilon$ .

**Definição 2.4.** *Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é uniformemente contínua quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existir  $\delta > 0$  tal que, para quaisquer  $x, y \in M$ ,  $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$ .*

Consequentemente, uma aplicação uniformemente contínua é, em particular, contínua, pois a escolha de  $\delta$  a partir do  $\epsilon$  dado independe do ponto onde se analisa a continuidade.

**Definição 2.5.** *Sejam  $\omega : M \rightarrow M$  uma aplicação e  $M$  um espaço métrico. Se  $\omega$  for lipschitziana de constante  $K$ , com  $0 \leq K < 1$ , então dizemos que  $\omega$  é uma contração. Neste caso, a constante de Lipschitz é chamada **fator de contração** de  $\omega$ .*

Toda contração é uniformemente contínua.

**Definição 2.6.** *Seja  $\omega : M \rightarrow M$  uma aplicação e  $M$  um espaço métrico, consideremos as iteradas  $\omega^0 = id_M, \omega^1 = \omega, \omega^2 = \omega \circ \omega^1 = \omega \circ \omega$ , definidas indutivamente por*

$$\omega^{n+1} = \omega \circ \omega^n$$

Note que  $x_0 = x = \omega^0(x), x_1 = \omega(x), x_2 = \omega(\omega(x)) = \omega^2(x)$ , e assim por diante. Assim, podemos definir as iteradas de um ponto  $x \in M$  por uma aplicação  $\omega$  indutivamente por:

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_{n+1} &= \omega(x_n); \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Lema 2.1.** *A sequência das iteradas de um ponto qualquer por uma contração de um espaço métrico nele mesmo é uma sequência de Cauchy.*

**Demonstração:** Sejam  $\omega : M \rightarrow M$  uma contração do espaço métrico  $(M, d)$  com constante de Lipschitz  $0 \leq K < 1$  e  $x_0 \in M$  um ponto qualquer de  $M$ . Consideremos  $x_{n+1} = \omega(x_n)$  para  $n \in \mathbb{N}$  e, mostremos que a sequência  $\{x_n\}$  das iteradas de  $x_0$  é de *Cauchy*. Como  $\omega$  é lipschitziana, temos que  $d(\omega(x), \omega(y)) \leq Kd(x, y)$ . Assim, tomando para  $x$  e  $y$  os pontos da sequência de iteradas de  $x_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(\omega(x_n), \omega(x_{n-1})) \leq Kd(x_n, x_{n-1}) \\ &= d(\omega(x_{n-1}), \omega(x_{n-2})) \leq K^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= K^{n-1}d(\omega(x_1), \omega(x_0)) \leq K^n d(x_1, x_0) = a_n \end{aligned}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\omega$  é uma contração, temos que  $K < 1$ , daí a série geométrica  $\sum K^n$  é convergente. Logo,  $\sum a_n$  também é convergente. Portanto, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n$  suficientemente grande, talque que

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{i=n}^{i=n+p-1} a_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

para todo  $p \geq 1$ , de onde segue que a sequência  $\{x_n\}$  das iteradas é de *Cauchy*. ■

**Teorema 2.1.** ( *Teorema do Ponto Fixo de Contração*) *Sejam  $(M, d)$  um espaço*

métrico completo e  $\omega : M \rightarrow M$  uma contração, então  $\omega$  possui um único ponto fixo.

**Demonstração:** Considere  $\omega : M \rightarrow M$  uma contração com fator de contração  $0 \leq K < 1$  do espaço métrico completo  $(M, d)$ . Tomando um ponto qualquer  $x_0 \in M$  e escrevendo  $x_{n+1} = \omega(x_n)$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Do Lema 2.1 sabemos que a sequência  $\{x_n\}$  é de Cauchy, e portanto, por  $M$  ser completo,  $\{x_n\}$  é convergente. Seja  $a \in M$  o limite das sequências das iteradas  $\{x_n\}_n$  do ponto  $x_0$ . Como  $\omega$  é uma contração e, portanto, uniformemente contínua, segue que  $a$  é um ponto fixo de  $\omega$ . Pela arbitrariedade de  $x_0$ , temos que todas as sequências de iteradas convergem a pontos fixos de  $\omega$ . Assim, basta mostrar que  $\omega$  tem um único ponto fixo.

Suponhamos que  $a, b \in M$  são pontos fixos de  $\omega$ , ou seja,

$$\omega(a) = a \quad \text{e} \quad \omega(b) = b$$

assim, obtemos

$$0 \leq d(a, b) = d(\omega(a), \omega(b)) \leq Kd(a, b)$$

o que implica em  $(1 - K)d(a, b) \leq 0$ . Como  $1 - K > 0$  segue que  $d(a, b) = 0$ . De onde segue que  $a = b$ . ■

**Corolário 2.1.** *Seja  $M$  um espaço métrico completo. Se  $\varphi : M \rightarrow M$  é contínua e, para algum  $m$ ,  $\varphi^m$  é uma contração, então existe um único ponto fixo  $p$ , atrator de  $\varphi$ . Ou seja, existe um único ponto  $p \in M$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = p \quad \forall x \in M$$

**Demonstração:** Seja  $p$  o ponto fixo atrator de  $\varphi^m$  dado pelo Teorema da Contração. Tomando  $n = mk + l$  com  $0 \leq l \leq m$ . Então dado  $x \in M$ ,  $\varphi^l(x)$  é um ponto de  $M$ . Pelo fato de  $p$  ser atrator de  $\varphi^m$  segue que  $\varphi^{mk}(\varphi^l(x)) \rightarrow p$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Note que  $\varphi^n(x) = \varphi^{mk}(\varphi^l(x))$ , bem como  $k \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . De onde segue que  $\varphi^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo,  $p$  é um ponto atrator de  $\varphi$ . Observe que

$$p = \lim \varphi^n(\varphi(p)) = \lim \varphi^{n+1}(p) = \lim \varphi(\varphi^n(p)) = \varphi(\lim \varphi^n(p)) = \varphi(p)$$

e, portanto,  $p$  é ponto fixo de  $\varphi$ . ■

**Teorema 2.2. (Teorema de Picard)** *Seja  $f$  lipschitziana em  $\Omega = I_a \times B_b$ , onde  $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$ ,  $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $|f| \leq D$  em  $\Omega$ , então existe uma única solução para o problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

em  $I_\alpha$  onde  $\alpha = \min\{a, b/D\}$

**Demonstração:** Seja  $X = C(I_\alpha, B_b)$  o espaço métrico completo das funções contínuas  $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$  com a métrica uniforme  $d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$ .

Para  $\varphi \in X$ , seja  $F(\varphi) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I_\alpha.$$

Note que  $F$  está bem definida pois  $f$  e  $\varphi$  são contínuas.

Afirmamos que:

- 1)  $F(X) \subseteq X$ .
- 2)  $F^n$  é uma contração, para  $n$  suficientemente grande.

De fato, para todo  $t \in I_\alpha$

$$|F(\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \leq D|t - t_0| \leq D\alpha.$$

como  $D\alpha = \min\{a \cdot D, b \cdot D/b\} = \min\{a \cdot D, b\} \leq b$  segue que

$$|F(\varphi)(t) - x_0| \leq b$$

portanto,  $F(\varphi)(t) \in B_b$ . Como a composta de funções contínuas é uma função contínua e a integral de funções contínuas é contínua, segue que  $F(\varphi)(t)$  é contínua, pois  $f$  e  $\varphi$  são contínuas. O que prova (1). Para provar (2), precisamos mostrar que para todo par  $\varphi_1, \varphi_2 \in X$  e todo  $n \geq 0$ , tem-se

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha,$$

onde  $K$  é a constante de Lipschitz de  $f$ . Vamos usar indução matemática sobre  $n$  para mostrar que esta desigualdade é verdadeira. Temos que para  $n = 0$  a desigualdade é válida. Suponhamos válida para  $n = k$  e mostremos que também vale para  $n = k + 1$ . Então

$$\begin{aligned}
 |F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)| &= |F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)| = \\
 &= \left| \int_{t_0}^t f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s)) ds \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_{t_0}^t K |F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)| ds \right| \leq \\
 &\leq K \left| \int_{t_0}^t \frac{K^k |s - t_0|^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| = \frac{K^{k+1} |t_0 - s|^{k+1}}{(k+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2)
 \end{aligned}$$

Portanto,  $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$  e, para  $n$  suficientemente grande,  $\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$ , pois este é o termo geral de uma série cuja soma é  $e^{\alpha K}$ , de onde segue que  $F^n$  é uma contração de  $X$ . Pelo **Corolário 2.1** existe uma única  $\varphi$  tal que  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  e  $\varphi(t_0 = x_0)$ , o que prova o Teorema de *Picard*. ■

A seguir (na próxima seção), apresentamos uma modelagem matemática de um problema biológico com equações diferenciais ordinárias.

## 2.3 Modelagem Matemática com EDO

Nesta seção nos baseamos em Keshet (2005), onde abordamos uma situação em que possam ser discutidos, do ponto vista matemático, alguns fenômenos biológicos. Assim, apresentamos modelos de equações diferenciais ordinárias, a sua formulação, análise e interpretação.

A ênfase principal nesta fase é sobre a forma adequada de simplificar o problema, o quão importante é identificar variáveis, e como equações diferenciais são adaptadas para descrever as características essenciais de um processo contínuo.

Uma das partes mais difíceis ao se fazer modelagem matemática consiste em escrever as equações que descrevem o fenômeno estudado. Geralmente, as equações são escritas em etapas, introduzindo hipóteses adequadas conforme forem necessárias. Inicialmente,

faremos uma abordagem que envolve uma equação diferencial bastante simples, como um modelo para o crescimento bacteriano. Aos poucos, consideramos situações com aspectos mais realistas, que levam a um sistema de duas equações diferenciais que descrevem a forma como os microorganismos se reproduzem.

### 2.3.1 Crescimento de Microorganismos

Os estudos apresentados nesta seção estão fundamentados em (Keshet, 2005). Um dos casos mais simples em microbiologia está relacionado ao crescimento de microorganismos unicelulares, como por exemplo, bactérias e alterações na sua população ao longo de um período de tempo. Em geral, uma gota de suspensão bacteriana é introduzida num frasco ou num tubo de teste contendo nutrientes. Em seguida, a cultura é mantida em condições compatíveis com o crescimento (por exemplo, a temperaturas adequadas) e muitas vezes mantidas em estado de agitação.

Em certas fases do crescimento o gráfico logarítmico da densidade bacteriana em função do tempo de observação se “ajusta” ao longo de uma reta. Buscamos investigar por que isso ocorre, bem como apontar as limitações desta observação.

Seja  $N(t)$  a densidade bacteriana observada no tempo  $t$ . Supondo que sejamos capazes de observar que, durante um período de uma unidade de tempo, uma única bactéria se divide, suas descendentes se dividem, e assim por diante, conduzindo assim, a um total de  $k$  novas células bacterianas. Seja  $k > 0$  (constante) a taxa de reprodução das bactérias por unidade de tempo.

Agora, suponha que as densidades são observadas em dois espaços de tempo  $t$  e  $t + \Delta t$ . Desconsiderando casos de morte, podemos então, esperar encontrar a seguinte relação:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + kN(t)\Delta t$$

O aumento da densidade ocorre devido a reprodução, durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ . Isto implica que

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = kN(t). \quad (2.5)$$

Agora, faremos uma aproximação para  $N$  por uma variável dependente contínua  $N(t)$ . Observe que tal aproximação torna-se razoável se: (i) considerarmos  $N$  suficientemente grande de forma que a adição de um ou mais indivíduos na população não tenha impor-

tância alguma, e (ii) o crescimento ou a reprodução dos indivíduos não estejam correlacionados. Aplicando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$  a equação (2.5) pode ser aproximada pela seguinte equação diferencial ordinária de variáveis separáveis (lei de *Malthus*):

$$\frac{dN}{dt} = kN, \quad (2.6)$$

cuja solução é dada por:

$$\ln N(t) = kt + a \quad (2.7)$$

onde  $a = \ln N(0)$ . Isso justifica a afirmação de que um gráfico de  $N(t)$  é linear no tempo, pelo menos para esta fase de crescimento para a qual  $k$  pode ser assumido como sendo uma constante. Conclui-se também a partir da equação (2.7) que

$$N(t) = N_0 e^{kt}, \quad (2.8)$$

onde  $N_0 = N(0) = e^a$  é a população *inicial*. Por este motivo, as populações que obedecerem equações, tais como (2.6) têm um crescimento exponencial. Este modelo é um dos mais simples para o crescimento bacteriano.

A equação (2.6), apesar de sua simplicidade, pode descrever muitos fenômenos naturais. Por exemplo, se trocarmos o sinal da constante  $k$ , obtemos um modelo em que uma fração  $k$  de indivíduos da população é retirada continuamente por unidade de tempo, seja por morte ou migração. Dessa forma, a solução

$$N(t) = N_0 e^{-kt}, \quad (k > 0). \quad (2.9)$$

descreve uma população em decrescimento. Esta equação também descreve o decaimento radiativo.

Podemos definir tempo de duplicação da população ( $\tau_2$ ) da seguinte forma: buscamos um tempo  $\tau_2$  tal que  $\frac{N(\tau_2)}{N_0} = 2$ . Substituindo na equação (2.8) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{N(\tau_2)}{N_0} &= 2 = e^{k\tau_2} \\ \ln(2) &= k\tau_2 \\ \tau_2 &= \frac{\ln(2)}{k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

de onde segue que o tempo de duplicação  $\tau_2$  é inversamente proporcional à constante  $k$ .

Voltando ao problema biológico, algumas considerações se fazem necessárias:

- (i) Deve-se evitar a armadilha de assumir que o modelo descrito por (2.6) é preciso para todos os tempos, uma vez que, na realidade, se o fornecimento de nutrientes for escasso (limitado) o crescimento de populações bacterianas está propenso a desacelerar, ou até mesmo a parar. Este fato tende a implicar que  $k$  não seja constante, mas que pode mudar com o tempo.
- (ii) Supondo que seja conhecida a taxa de crescimento bacteriano  $k(t)$  como uma função do tempo. Então, do que foi feito anteriormente, obtemos

$$N(t) = N_0 e^{\int_0^t k(s) ds}. \quad (2.11)$$

Por exemplo, se  $k$  diminui a uma taxa exponencial, a população possivelmente irá parar de crescer. Esta hipótese é conhecida como lei de Gompertz.

- (iii) Em geral, não se conhece a dependência exata da taxa de reprodução com relação ao tempo. No entanto, pode-se saber que isso depende direta ou indiretamente da densidade da população.

- (iv) Outra questão a ser considerada é o fato de que o crescimento depende diretamente dos recursos disponíveis para a população (por exemplo, sobre o nível de nutriente que fica no tubo). Assim, supondo que podemos assumir que a taxa de reprodução  $k$  é simplesmente proporcional à concentração do nutriente,  $C$ :

$$k(C) = \eta C. \quad (2.12)$$

Ainda mais, podemos supor que  $\alpha$  unidades de nutrientes são consumidas ao se produzir uma unidade de população “incremento” ( $Y = \frac{1}{\alpha}$  é então chamado de rendimento). Isto implica então que o crescimento bacteriano e o consumo de nutriente pode ser descrito pelo seguinte par de equações:

$$\frac{dN}{dt} = k(C)N = \eta CN, \quad (2.13a)$$

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha \frac{dN}{dt} = -\alpha \eta CN. \quad (2.13b)$$



Este sistema de equações diferenciais ordinárias pode ser resolvido da seguinte forma:

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha \frac{dN}{dt},$$

ou seja

$$C(t) = -\alpha N(t) + C_0 \quad (2.14)$$

onde  $C_0 = C(0) + \alpha N(0)$  é constante. Se a população for inicialmente muito pequena,  $C_0$  é aproximadamente igual à quantidade inicial de nutrientes no tubo. Substituindo (2.14) na equação (2.13a) obtemos

$$\frac{dN}{dt} = \eta(C_0 - \alpha N)N \quad (2.15)$$

**Observação 2.1.** *Note que os pressupostos assumidos, são matematicamente equivalentes a assumir que a reprodução é dependente da densidade com*

$$k(N) = \eta(C_0 - \alpha N). \quad (2.16)$$

*Este tipo de lei é conhecido como crescimento logístico, que geralmente aparece em modelos de dinâmica populacional na forma  $\frac{dN}{dt} = r(l - N/B)N$ .*

A solução da equação (2.15) é dada por

$$N(t) = \frac{N_0 B}{N_0 + (B - N_0)e^{-rt}} \quad (2.17)$$

onde  $N_0 = N(0)$  é a população inicial,  $r = \eta C_0$  é o parâmetro de crescimento intrínseco,  $B = C_0/\alpha$  é a capacidade de suporte. Uma característica importante da equação (2.17) é que para valores muito grande de  $t$  a população se aproxima do valor da capacidade de suporte, isto é,  $N(\infty) = B = C_0/\alpha$ . Ao passo que, em níveis muito baixos a população tem crescimento aproximado por uma exponencial a uma taxa  $r = \eta C_0$ .

A seguir, vamos abordar um modelo um pouco mais sofisticado, para o crescimento bacteriano em um quimiostato<sup>2</sup>, conforme apresentado por (Keshet, 2005).

---

<sup>2</sup>(Ambiente químico que é estático). Conforme (Harrison, 1973), quimiostato é uma técnica para produzir um estado estacionário numa cultura em crescimento de microrganismos sob condições controladas. A taxa de crescimento do organismo é fixada pela taxa de alimentação do meio, de forma que a concentração do organismo e do substrato deve chegar a um nível estável.

### 2.3.2 Crescimento Bacteriano em um Quimiostato

Normalmente, ao realizar experimentos sobre crescimento de microrganismos sob diversas condições de laboratório, torna-se necessário manter um suprimento de estoque da estirpe a ser estudada. É conveniente a manutenção de uma cultura contínua a partir da qual as células que crescem ativamente podem ser colhidas a qualquer tempo, pois utilizar alguma forma dormente exigiria muito tempo para produzir culturas ativas.

Para configurar esse tipo de cultura, é necessário conceber um meio de reposição para o fornecimento de nutrientes enquanto estão sendo consumidos, e ao mesmo tempo manter alguns níveis populacionais convenientes das bactérias ou outro organismo em cultura. Isso geralmente é feito em um aparelho chamado quimiostato, representado pelo diagrama na figura 2.3

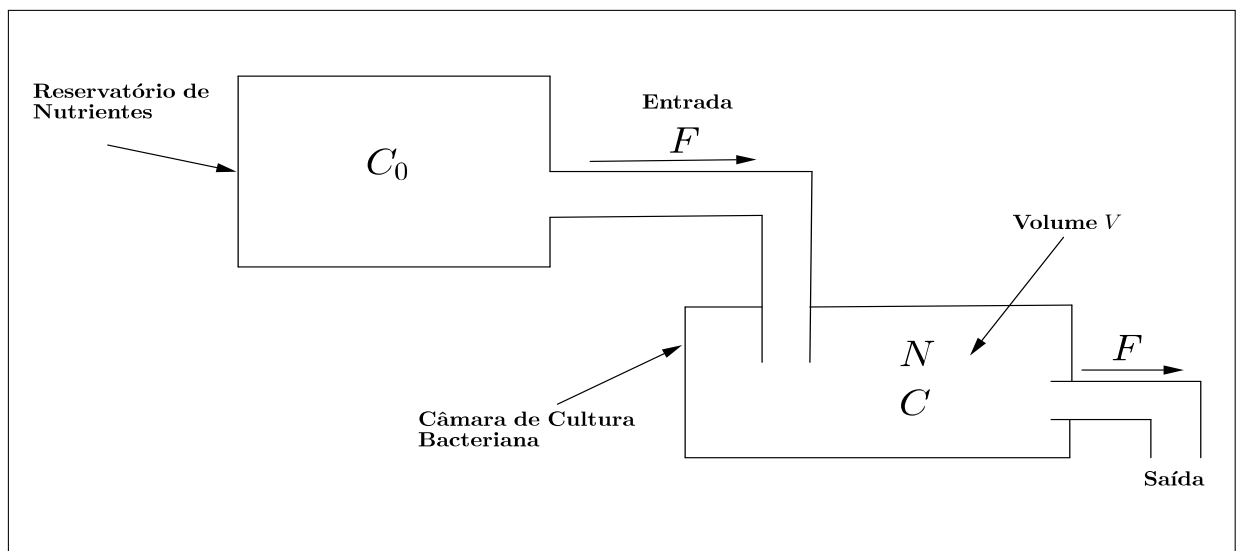


Figura 2.3: O quimiostato é um dispositivo para cultivo de bactérias. A concentração de nutrientes  $C_0$  entra na câmara de cultura bacteriana com taxa de fluxo  $F$ . Há uma taxa igual de fluxo na saída, de modo que o volume  $V$  é constante. Fonte: adaptado de Keshet (2005) pg.121.

A solução do estoque de nutrientes é bombeada para câmara de crescimento onde as bactérias são cultivadas a uma taxa fixa. A válvula de saída da câmara de crescimento tem a mesma taxa de vazão, de modo que o volume da cultura permanece constante. Agora, devemos projetar o sistema de forma que:

1. A taxa de fluxo não seja tão grande, de modo que toda a cultura não seja levada para fora da câmara e, portanto, eliminada.
2. A reposição de nutrientes é suficientemente rápida, de modo que a cultura possa

continuar crescendo normalmente.

É possível escolher uma concentração de nutrientes adequada no estoque, a taxa de fluxo, e o tamanho da câmara de crescimento. Neste exemplo, o modelo terá dois objetivos. Em primeiro lugar, a progressão das etapas que culminarão nas demonstrações matemáticas poderão melhorar a nossa compreensão do quimiostato. Em segundo lugar, o próprio modelo irá nos guiar para que possamos tomar opções apropriadas para parâmetros tais como taxas de fluxo, concentração de nutrientes em estoque, e assim por diante.

### 2.3.3 Formulação do Modelo

É necessário que tenhamos muito cuidado na formulação do modelo, uma vez que, muitos fatores devem ser levados em consideração, de forma a manter o controle da população bacteriana e a oferta de alimentos. Nossa primeira tarefa será identificar as quantidades que controlam a operação no quimiostato. Esses dados estão listados na tabela 2.1, juntamente com símbolos e dimensões atribuídas.

Tabela 2.1: Parâmetros no Quimiostato.

Quantidade	Símbolo	Dimensão
A concentração de nutrientes em câmara de crescimento	$C$	massa/volume
A concentração de nutrientes no reservatório	$C_0$	massa/volume
Densidade de população bacteriana	$N$	número por volume
constante de rendimentos	$Y = \frac{1}{\alpha}$	número/massa
Volume de câmara de crescimento	$V$	volume
entrada/saída caudal	$F$	volume/tempo

Também devemos manter o controle das suposições feitas no modelo; por exemplo, podemos começar com:

1. A câmara de cultura deve ser mantida bem agitada, e não existem variações espaciais nas concentrações de nutrientes ou de bactérias. (Podemos descrever os eventos usando equações diferenciais ordinárias com o tempo como a única variável independente).

Neste ponto, escreveremos uma equação preliminar para a densidade da população bacteriana  $N$ . A partir da figura 2.2 pode-se ver que a maneira com que  $N$  muda dentro da câmara de cultura depende do equilíbrio entre o número de bactérias formadas com a reprodução da cultura e o número que flui para fora do tanque. Esta situação pode ser

escrita em forma de equação, como:

$$\frac{dN}{dt} = kN - FN \quad (2.18)$$

onde  $k$  é a taxa de reprodução das bactérias, como antes.  $kN$  é a reprodução e  $FN$  é a vazão.

No intuito de avançarmos, mais hipóteses devem ser feitas, normalmente poderíamos simplificar o problema supondo que:

2. Apesar de o meio nutritivo poder conter uma série de componentes, pode-se chamar a atenção para um único nutriente limitante do crescimento cuja concentração irá determinar a taxa de crescimento da cultura.
3. A taxa de crescimento da população depende da disponibilidade de nutrientes, de modo que  $k = k(C)$ .

Em seguida, escreva uma equação para alterações em  $C$ , o nível de nutrientes na câmara de crescimento. Aqui novamente há várias influências que tendem a aumentar ou diminuir a concentração: entrada de abastecimento do estoque e esgotamento por bactérias, bem como a saída de nutrientes no efluente. Vamos supor que:

4. O esgotamento de nutrientes ocorre de forma contínua, como resultado de reprodução, a regra especificada para o crescimento da cultura e para o esgotamento de nutrientes será, essencialmente, a mesma que antes. Aqui  $\alpha$  tem o mesmo significado que na equação (2.13b).

Podemos escrever a equação da taxa de variação de nutrientes da seguinte forma:

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha k(C)N - FC + FC_0 \quad (2.19)$$

Contudo, as equações (2.18) e (2.19) não estão totalmente corretas. Assim, precisamos identificar e corrigir os equívocos cometidos. Podemos fazer isto comparando as dimensões dos termos que aparecem nas equações. Estes devem corresponder, de forma clara, pois não faria sentido equacionar quantidades com unidades de medidas não similares. Escrevendo as dimensões exatas de cada termo nas equações, obtemos:

$$\begin{array}{c} \frac{dN}{dt} \\ \downarrow \\ \text{número} \end{array} = \underbrace{k(C)}_{\downarrow} \underbrace{N}_{\searrow} - \underbrace{F}_{\downarrow} \underbrace{N}_{\searrow}.$$

Dimensões:  $\frac{\text{número}}{\text{volume} \times \text{tempo}} = \frac{1}{\text{tempo}} \frac{\text{número}}{\text{volume}} - \frac{\text{volume}}{\text{tempo}} \frac{\text{número}}{\text{volume}}$

Daí resultam que:

- 1)  $k(C)$ , a taxa de crescimento, deve ter dimensões de  $1/\text{tempo}$ .
- 2) O segundo termo do lado direito da igualdade está incorreto, pois tem uma dimensão  $\text{volume}$  a mais, que não pode ser conciliada com os demais termos da equação.

Ao considerarmos as dimensões, encontramos uma inconsistência no termo  $FN$  da equação (2.18). Uma forma de corrigir este problema seria dividir  $FN$  por uma quantidade que tenha dimensões em unidade de volume. Assim, devemos considerar  $(FN)/V$  como sendo a correção mais apropriada. Note que  $FN$  é o número de bactérias que evacoam por minuto, e portanto,  $(FN)/V$  é a densidade efetiva de bactérias que saem por minuto.

Analogamente, na equação (2.19) os termos  $FC$  e  $FC_0$  devem ser divididos por  $V$ . Após estas correções, obtemos as seguintes versões corrigidas para (2.18) e (2.19)

$$\frac{dN}{dt} = k(C)N - \frac{FN}{V}, \quad (2.20a)$$

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha k(C)N - \frac{FC}{V} + \frac{FC_0}{V}. \quad (2.20b)$$

Assim, é notória a importância da análise de dimensões na detecção de erros nesta fase da modelagem. Porém, o fato de uma equação ser dimensionalmente consistente não implica que ela esteja sempre correta a partir de princípios físicos. Em problemas tais como o do quimiostato, onde as substâncias são transportadas de um compartimento para outro, um bom ponto de partida para se escrever uma equação é o princípio físico de que a massa é conservada.

Uma afirmação equivalente é que o número de partículas deve ser conservado. Dessa forma, observando que  $NV$  é igual ao número de bactérias na câmara e  $CV$  é igual a massa nutriente na câmara, obtemos um balanço de massa para as duas espécies escrevendo

$$\frac{dNV}{dt} = k(C)NV - FN \quad (2.21a)$$

$$\frac{dCV}{dt} = -\alpha k(C)NV - FC + FC_0 \quad (2.21b)$$

Note que, se dividirmos (2.21a) e (2.21b) pela constante  $V$  obtemos (2.20a) e (2.20b).

### 2.3.4 Taxa de Saturação do Consumo de Nutrientes

Para que o modelo tome aspectos mais realísticos, podemos pensar em incorporar o fato de que a taxa de crescimento bacteriano depende da disponibilidade de nutrientes. A taxa de reprodução bacteriana tende a crescer com o aumento da concentração de nutrientes. Porém, a concentração de nutrientes em excesso não implica que a taxa de crescimento bacteriano continuará crescendo indefinidamente. Assim, uma hipótese adequada seria a de incorporar o efeito de uma dependência de saturação, ou seja, supor que:

5. A taxa de crescimento aumenta com a disponibilidade de nutrientes somente até algum valor limitado (a bactéria individual só pode consumir nutrientes e se reproduzir a uma taxa limitada). Um tipo de mecanismo que incorpora este efeito é a cinética de Michaelis-Menten, ou seja:

$$k(C) = \frac{k_{max}C}{k_n + C} \quad (2.22)$$

onde  $k_n$  é denominada constante de Michaelis. Note que  $k_{max}$  representa um limite superior para  $k(C)$  e que, para  $C = k_n$ ,  $k(C) = (k_{max})/2$ . Disto, as equações do modelo podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k_{max}C}{k_n + C}N - \frac{FN}{V} \quad (2.23a)$$

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha \frac{k_{max}C}{k_n + C}N - \frac{FC}{V} + \frac{FC_0}{V}. \quad (2.23b)$$

Para entender essas afirmações, fazemos uma distinção entre as quantidades que são variáveis, tal como  $N$  e  $C$  e aquelas que são parâmetros. Há pouco que podemos fazer para controlar a forma diretamente, por se submeterem a mudanças em resposta a sua dinâmica inerente. Porém, poderemos selecionar valores de certos parâmetros (como

$F$ ,  $C_0$ , e  $V$ ) que influenciarão o processo, outros parâmetros, como  $k_{max}$  e  $k_n$ , dependem dos tipos de bactérias e nutrientes selecionados no experimento.

É de interesse determinar o que acontece quando certas combinações de parâmetros variam sobre uma gama de valores. Aceitavelmente, um aumento de algumas grandezas poderia apenas compensar a diminuição de outras de modo que, qualitativamente, o sistema como um todo permaneceria o mesmo. Assim, enquanto um total de seis parâmetros aparece nas equações (2.23a) e (2.23b) o processo químico pode de fato ter menos de seis graus de liberdade. Esta ideia pode ser feita mais precisa através de mais uma análise dimensional das equações para reescrever o modelo em termos de uma quantidade menor de dimensões.

### 2.3.5 Análise Dimensional das Equações

Como apresentado na tabela 2.1, as grandezas medidas em um experimento como o do esquema quimiostato são especificadas em termos de certas unidades convencionais. Estes são, para uma extensão maior, arbitrária. Por exemplo, uma densidade bacteriana de  $10^5$  células por litro pode ser escrita por uma das seguintes maneiras equivalentes:

$$\begin{aligned} N &= 10^5 \text{ células/litro} \\ &= 1 \text{ (unidade de } 10^5 \text{ células)/litro} \\ &= 100 \text{ células/mililitros} \\ &= N^* \hat{N}. \end{aligned}$$

Aqui temos distintamente separadas a grandeza medida em duas partes: um escalar  $N^*$ , que não tem dimensões, e uma grandeza  $\hat{N}$ , que representa a unidade de medidas e carrega a dimensão física. Os valores  $10^5$ , 1, 100, e  $N^*$  todos se referem a mesma observação mas em escalas diferentes. Com a evolução do tempo  $N$  e  $N^*$  podem mudar, mas  $\hat{N}$  é inalterável, refletindo o fato de que a escala de medidas não se altera. Todas as variáveis originais podem ser expressadas similarmente, como segue:

$$\begin{aligned} \text{Grandeza medida} &= \text{escalar} \times \text{dimensões da unidade de transporte} \\ N &= N^* \times \hat{N}, \\ C &= C^* \times \hat{C}, \\ t &= t^* \times \tau. \end{aligned}$$

Logo veremos a vantagem adquirida através da expressão das equações em termos de grandezas adimensionais como  $N^*$ ,  $C^*$  e  $t^*$ . Para isso, primeiro substituímos as expressões  $N^* \hat{N}$ ,  $C^* \hat{C}$ ,  $t^* \tau$  por  $N$ ,  $C$  e  $t$ , respectivamente, nas equações (2.23a,b), e então exploramos

o fato de que  $\hat{N}$ ,  $\hat{C}$  e  $\tau$  são constantes independentes do tempo. Obtemos:

$$\frac{d(N^*\hat{N})}{d(t^*\tau)} = \left( \frac{k_{max}C^*\hat{C}}{k_n + C^*\hat{C}} \right) N^*\hat{N} - \frac{F}{V}(N^*\hat{N}) \quad (2.24a)$$

$$\frac{d(C^*\hat{C})}{d(t^*\tau)} = -\alpha \left( \frac{k_{max}C^*\hat{C}}{k_n + C^*\hat{C}} \right) N^*\hat{N} - \frac{FC^*\hat{C}}{V} + \frac{FC_0}{V}. \quad (2.24b)$$

Agora, multiplicando ambos os lados por  $\tau$ , e dividindo por  $\hat{N}$  ou  $\hat{C}$  e agrupando os termos constantes. Obtemos:

$$\frac{d(N^*)}{dt^*} = \tau k_{max} \left( \frac{C^*}{\frac{k_n}{\hat{C}} + C^*} \right) N^* - \tau \frac{F}{V} N^*, \quad (2.25a)$$

$$\frac{dC^*}{dt^*} = \left( \frac{-\alpha \tau k_{max} \hat{N}}{\hat{C}} \right) \left( \frac{C^*}{\frac{k_n}{\hat{C}} + C^*} \right) N^* - \tau \frac{F}{V} C^* + \frac{\tau FC_0}{V\hat{C}}. \quad (2.25b)$$

Fazendo escolhas convenientes para as escalas de medição  $\hat{N}$ ,  $\tau$  e  $\hat{C}$ , que ainda não estão especificadas, seremos capazes de fazer com que as equações pareçam muito mais simples e contendo menos parâmetros. As equações (2.25a,b) sugere um número de escalas que são inerentes ao problema do quimiostato. Note o que acontece quando escolhemos

$$\tau = \frac{V}{F}, \quad \hat{C} = k_n, \quad \hat{N} = \frac{k_n}{\alpha \tau k_{max}}.$$

A equação, agora, pode ser escrita da seguinte forma, na qual omitimos os asteriscos por conveniência.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1 \left( \frac{C}{1+C} \right) N - N \quad (2.26a)$$

$$\frac{dC}{dt} = - \left( \frac{C}{1+C} \right) N - C + \alpha_2. \quad (2.26b)$$

As equações contêm dois parâmetros adimensionais  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  no lugar das seis originais



$(k_n, k_{max}, F, V, C_0$  e  $\alpha)$ . Estes parâmetros estão relacionados pelas seguintes equações

$$\alpha_1 = (\tau k_{max}) = \frac{V k_{max}}{F}$$

$$\alpha_2 = \frac{\tau F C_0}{V \hat{C}} = \frac{C_0}{k_n}$$

Obtemos assim a forma adimensional do modelo quimiostato, dado pelas equações (2.26a,b). Essa equações não são apenas mais simples, mas, também, mais reveladoras. Acima, vemos que apenas dois parâmetros afetam o esquema quimiostato. Nenhuma outra escolha de  $\tau, \hat{C}$  e  $\hat{N}$  renderia menos que dois parâmetros. Assim, o esquema quimiostato tem dois graus de liberdade.

As equações (2.26a,b) são não-lineares por causa do termo  $\frac{NC}{1+C}$ . Geralmente isso significa que há pouca esperança de encontrar uma solução explícita para  $N(t)$  e  $C(t)$ . Porém, ainda podemos explorar a natureza de classes especiais de solução. Uma vez que estamos interessados na manutenção de uma cultura contínua na qual bactéria e nutrientes estejam presentes em alguma densidade fixada, determinaremos na seção a seguir se as equações (2.26a,b) admitem solução de equilíbrio.

### 2.3.6 Soluções Estacionárias

Solução estacionária é uma situação em que o sistema não apresenta nenhuma mudança. Mais precisamente, os valores de uma variável como densidade bacteriana e concentração de nutrientes dentro do esquema quimiostato, seria inalterável na solução estacionária apesar de partículas de nutrientes individuais continuarem a entrar, sair ou serem consumidas. Isso significa que as derivadas são iguais a zero, ou seja,

$$\frac{dN}{dt} = 0 \tag{2.27a}$$

$$\frac{dC}{dt} = 0 \tag{2.27b}$$

observamos que as grandezas no lado direito das equações (2.26a,b), são zero no ponto de equilíbrio  $(\bar{N}, \bar{C})$ , ou seja,

$$F(\bar{N}, \bar{C}) = \alpha_1 \left( \frac{\bar{C}}{1 + \bar{C}} \right) \bar{N} - \bar{N} = 0 \quad (2.28a)$$

$$G(\bar{N}, \bar{C}) = - \left( \frac{\bar{C}}{1 + \bar{C}} \right) \bar{N} - \bar{C} + \alpha_2 = 0 \quad (2.28b)$$

Essa condição fornece duas equações algébricas que podem ser resolvidas explicitamente para  $\bar{N}$  e  $\bar{C}$ . De (2.28a) vemos que ou

$$\bar{N} = 0 \quad (2.29a)$$

ou

$$\frac{\bar{C}}{1 + \bar{C}} = \frac{1}{\alpha_1}; \quad \alpha_1 \neq 0. \quad (2.29b)$$

Depois de algumas simplificações da equação (2.29b), obtemos  $\bar{C} = \frac{1}{\alpha_1 - 1}$ ,  $\alpha_1 \neq 1$ . Da equação (2.28b) se  $\bar{N} = 0$  obtém-se  $\bar{C} = \alpha_2$ ; por outro lado se  $\bar{N} \neq 0$  obtemos

$$\left( \frac{\bar{C}}{1 + \bar{C}} \right) \bar{N} = (\alpha_2 - \bar{C}). \quad (2.30)$$

Usando (2.29b) obtemos

$$\bar{N} = \frac{1 + \bar{C}}{\bar{C}} (\alpha_2 - \bar{C}) = \alpha_1 (\alpha_2 - \bar{C}). \quad (2.31)$$

A combinação das informações nas equações (2.30) e (2.31) conduz à conclusão de que há duas soluções estacionárias:

$$(\bar{N}_1, \bar{C}_1) = \left( \alpha_1 \left( \alpha_2 - \frac{1}{\alpha_1 - 1} \right), \frac{1}{\alpha_1 - 1} \right) \quad (2.32a)$$

$$(\bar{N}_2, \bar{C}_2) = (0, \alpha_2). \quad (2.32b)$$

A segunda solução  $(\bar{N}_2, \bar{C}_2)$  apresenta uma situação que não é de interesse experimental: não há bactérias na câmara de cultura e o nutriente está na mesma concentração

como uma solução de estoque (lembre-se do significado de  $\alpha_2$  e a escala de concentração a qual isso se refere). A primeira solução (2.32a) parece mais inspiradora, mas note que biologicamente, tal situação nem sempre existe. Isso depende da magnitude dos termos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Claramente, se  $\alpha_1 < 1$  obtemos valores negativos. Uma vez que as densidades das concentrações populacionais precisam ser sempre positivas, a conclusão é que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  devem ser tais que  $\alpha_1 > 1$  e  $\alpha_2 > \frac{1}{\alpha_1 - 1}$ .

### 2.3.7 Estabilidade e Linearização

Até agora descobrimos duas soluções estacionárias que satisfazem as equações (2.26a,b). Em situações reais há sempre pequenos distúrbios aleatórios. Dessa forma, é de interesse determinar se tais desvios da solução estacionária levará a mudanças drásticas ou será amortecido.

Essencialmente, nesta seção buscamos verificar que, perto da solução estacionária, o problema pode ser aproximado por uma função linear. Analisemos o caso geral, tomando nosso sistema de equações diferenciais ordinárias como

$$\frac{dX}{dt} = F(X, Y), \quad (2.33a)$$

$$\frac{dY}{dt} = G(X, Y), \quad (2.33b)$$

onde  $F$  e  $G$  são funções não-lineares, com primeira e segunda derivadas contínuas. Assumimos que  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  são soluções estacionárias, isto é, satisfazem

$$F(\bar{X}, \bar{Y}) = G(\bar{X}, \bar{Y}) = 0 \quad (2.34)$$

Agora, considere as soluções perto do ponto de equilíbrio

$$X(t) = \bar{X} + x(t), \quad (2.35a)$$

$$Y(t) = \bar{Y} + y(t). \quad (2.35b)$$

$x(t)$  e  $y(t)$  são frequentemente chamadas de perturbações do ponto de equilíbrio. Substi-

tuindo, chegamos a

$$\frac{d}{dt}(\bar{X} + x) = F(\bar{X} + x, \bar{Y} + y), \quad (2.36a)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{Y} + y) = G(\bar{X} + x, \bar{Y} + y). \quad (2.36b)$$

Do lado esquerdo, expandimos as derivadas e observamos que  $d\bar{X}/dt = 0$  e  $d\bar{Y}/dt = 0$ . Do lado direito, supondo que  $F$  e  $G$  tenham derivadas contínuas até ordem 2 em  $(\bar{X}, \bar{Y})$ , então a expansão em série de Taylor sobre o ponto  $(\bar{X}, \bar{Y})$ , tem a seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = F(\bar{X}, \bar{Y}) + F_x(\bar{X}, \bar{Y})x + F_y(\bar{X}, \bar{Y})y + \dots \quad (2.37a)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(\bar{X}, \bar{Y}) + G_x(\bar{X}, \bar{Y})x + G_y(\bar{X}, \bar{Y})y + \dots \quad (2.37b)$$

onde  $F_x(\bar{X}, \bar{Y})$  é  $\partial F/\partial x$  avaliada em  $(\bar{X}, \bar{Y})$  e similarmente para  $F_y, G_x, G_y$ , e outros termos. Novamente pela definição  $F(\bar{X}, \bar{Y}) = 0 = G(\bar{X}, \bar{Y})$ . Assim,

$$\frac{dx}{dt} \approx a_{11}x + a_{12}y, \quad (2.38a)$$

$$\frac{dy}{dt} \approx a_{21}x + a_{22}y, \quad (2.38b)$$

onde a matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y})}. \quad (2.39)$$

é o sistema Jacobiano das equações (2.33a,b). Note que nas aproximações em (2.38a,b) desprezamos os termos de ordem maior ou igual a 2. Isso é possível devido ao seguinte resultado, que pode ser encontrado no capítulo 6 de Jones (2016).

**Teorema 2.3.** (*Grobman-Hartman*) *Suponha que  $(\bar{X}, \bar{Y})$  seja um ponto crítico hiperbólico (isto é, a parte real dos autovalores da matriz jacobiana  $A$  são diferentes de zero). Então o retrato de fase da linearização e as equações não lineares são homeomorfos em uma*

vizinhança do ponto de equilíbrio.

A seguir apresentamos o Teorema de *Lyapunov-Poincaré* que pode ser encontrado no capítulo 6 de Jones (2016).

**Teorema 2.4.** (*Linearização de Lyapunov-Poincaré*) Suponha que  $(\bar{X}, \bar{Y})$  é um ponto crítico do sistema não-linear (2.33a,b), e suponha que a  $Re(\lambda_i), i = 1, 2$ , a parte real dos autovalores da matriz  $A$  (a linearização) são negativas. Então, o ponto crítico é localmente assintoticamente estável.

Por último, para discutirmos a estabilidade, somos levados ao questionamento de como as soluções para as equações (2.38a,b) se comportam. Nas seções seguintes nos dedicaremos ao estudo de tais comportamentos.

### 2.3.8 Solução de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares a Coeficientes Constantes

Consideremos o sistema com duas equações diferenciais ordinárias a seguir

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2.40)$$

onde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Mais geralmente, um sistema com  $n$  equações diferenciais ordinárias e  $n$  variáveis tem a forma (2.40) com  $\mathbf{A}_{n \times n}$  e  $\mathbf{X}_{n \times 1}$ . Note que temos uma multiplicação de matrizes, e  $d\mathbf{X}/dt$  é um vetor com coordenadas  $dx/dt$  e  $dy/dt$ .

**Observação 2.2.** Sejam  $x_1(t), y_1(t), x_2(t)$  e  $y_2(t)$  funções a valores reais definidas em  $\mathbb{R}$ . Se

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) + ix_2(t) \\ y(t) = y_1(t) + iy_2(t) \end{cases} \quad (2.41)$$

for solução do sistema (2.40), então

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

também serão soluções de (2.40). De fato, se (2.41) for solução de (2.40), temos

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + i\dot{x}_2(t) &= a_{11}(x_1(t) + ix_2(t)) + a_{12}(y_1(t) + iy_2(t)) \\ \dot{y}_1(t) + i\dot{y}_2(t) &= a_{21}(x_1(t) + ix_2(t)) + a_{22}(y_1(t) + iy_2(t)) \end{cases}$$

de onde segue que:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}y_1(t) \end{cases} e \begin{cases} \dot{x}_2(t) &= a_{11}x_2(t) + a_{12}y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= a_{21}x_2(t) + a_{22}y_2(t) \end{cases}.$$

Logo, (2.42) são soluções de (2.40).

O sistema 2.40 lembra a equação diferencial (2.6) cuja solução é dada por (2.8). Assim, ocorre, então, a ideia de tentar soluções para (2.40) na forma

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}. \quad (2.43)$$

Agora  $\mathbf{v}$  deve ser um vetor coluna cujas entradas são independentes do tempo. Assim, substituindo (2.43) em (2.40) obtemos:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v} \frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t}.$$

Observando que a última igualdade deve ser satisfeita se (2.43) for uma solução do sistema (2.40). Cancelando os termos em comum  $e^{\lambda t}$  segue que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (2.44)$$

Note que  $\mathbf{v}$  não pode ser cancelado, pois  $\mathbf{A}\mathbf{v}$  é um produto de matrizes. Porém, podemos reescrever (2.44) como

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade, ou seja,  $\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ . Temos que  $\lambda\mathbf{I}$  também é uma matriz, isto

é,

$$\lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a equação (2.45) pode ser reescrita como

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.46)$$

Da álgebra linear, temos que (2.46) é um sistema de equações que possui como solução os autovalores  $\lambda$  e autovetores  $\mathbf{v}$  da matriz  $\mathbf{A}$ . Esse sistema admite solução não nula  $\mathbf{v}$  se, e somente se,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (2.47)$$

chamada de equação característica de  $\mathbf{A}$ , na variável  $\lambda$ . Para  $\lambda$  satisfazendo esta equação, é possível encontrar os vetores  $\mathbf{v}$  que verificam (2.46). Estes vetores não são únicos, pois existem infinitos valores de  $\mathbf{v}$  para cada  $\lambda$ , formando um subespaço vetorial, ou seja, pode depender de duas ou mais constantes: Quando (2.47) for satisfeita, as equações que compõem o sistema algébrico (2.46) são redundantes.

No caso de um sistema  $2 \times 2$  os autovalores são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\delta}}{2}$$

onde

$$\beta = \text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$$

$$\delta = \text{disc}(\mathbf{A}) = \beta^2 - 4\gamma$$

$$\gamma = \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Caso os autovalores sejam reais, os autovetores associados serão da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ v_i = \frac{\lambda_i - a_{11}}{a_{12}} \end{pmatrix}; \quad a_{12} \neq 0$$

Temos três casos a considerar:

(i) se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  reais, uma vez encontrados os autovetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , a solução geral é dada

por

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.48)$$

(ii) se  $\lambda_1 = \lambda_2$  real, então existe um único autovetor associado  $\mathbf{v}$ , assim a solução geral deve ser alterada para que se tenha duas partes distintas e linearmente independentes. Portanto, a solução geral assume a forma:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}$$

(iii) Se os autovalores são complexos, isto é,  $\lambda_{1,2} = r \pm ci$ . Este caso acontece quando  $\text{disc}(\mathbf{A}) < 0$ , então  $r = \beta/2$  (parte real de  $\lambda$ ),  $c = \sqrt{\delta}/2$  (parte imaginária de  $\lambda$ ). Observe que os autovalores complexos sempre aparecem em pares conjugados.

Autovalores complexos sempre têm autovetores complexos conjugados correspondentes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ bi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -bi \end{bmatrix},$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais. Neste caso, a solução geral tem a seguinte forma:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} a \\ bi \end{bmatrix} e^{(r+ci)t} + c_2 \begin{bmatrix} a \\ -bi \end{bmatrix} e^{(r-ci)t} \quad (2.49)$$

pela identidade de *Euler*, temos que

$$\begin{aligned} e^{(r+ci)t} &= e^{rt} [\cos(ct) + i \sin(ct)] \\ e^{(r-ci)t} &= e^{rt} [\cos(ct) - i \sin(ct)]. \end{aligned}$$

Assim, a equação (2.49) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{rt} \left( \begin{bmatrix} a \\ bi \end{bmatrix} (\cos(ct) + i \sin(ct)) + \begin{bmatrix} a \\ -bi \end{bmatrix} (\cos(ct) - i \sin(ct)) \right),$$

ou seja,

$$\begin{cases} x(t) &= e^{rt} (a \cos(ct) + ai \sin(ct) + a \cos(ct) - ai \sin(ct)) \\ y(t) &= e^{rt} ([bi \cos(ct) - b \sin(ct) - bi \cos(ct) - b \sin(ct)] . \end{cases}$$



De onde segue que:

$$\begin{cases} x(t) &= e^{rt} [2a \cos(ct)] \\ y(t) &= e^{rt} [-2b \sin(ct)] . \end{cases}$$

Fazendo  $x_1(t) = 2a \cos(ct)$  e  $y_1 = -2b \sin(ct)$ , a equação anterior assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} x(t) &= e^{rt} x_1(t) \\ y(t) &= e^{rt} y_1(t) . \end{cases}$$

O Wronskiano dessas soluções é dado por:

$$\mathbf{W}(t) = \det \left[ e^{rt} \begin{pmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{y}_1(t) \end{pmatrix} \right] = (e^{rt})^2 \begin{vmatrix} 2a \cos(ct) & -2b \sin(ct) \\ -2ac \sin(ct) & -2bc \cos(ct) \end{vmatrix} = (-4abc)e^{rt}.$$

Note que  $\mathbf{W}(t) \neq 0$  se, e somente se,  $a, b$  e  $c$  forem ambos não nulos. Assim, podemos definir

$$\mathbf{u}_1(t) = e^{rt} a_1 \cos(ct) \text{ e } \mathbf{u}_2(t) = -e^{rt} b_1 \sin(ct)$$

$$\mathbf{w}_1(t) = e^{rt} a_2 \sin(ct) \text{ e } \mathbf{w}_2(t) = -e^{rt} b_2 \cos(ct),$$

com  $a_1, a_2, b_1, b_2$  ambos não nulos. Definindo

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{w}_1(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2(t) \\ \mathbf{w}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Note que  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{w}(t)$  assim definidas são tais que:

$$\mathbf{W}(t) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) & \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

Assim,  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{w}(t)$  são linearmente independentes e, portanto, a solução geral é dada por:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{w}(t). \quad (2.51)$$

Assim, autovalores complexos conduzem a soluções oscilatórias. A parte imaginária  $c$  controla a frequência de oscilação, ao passo que a parte real  $r$  regula a amplitude, que, aumenta se  $r > 0$ , diminui se  $r < 0$  ou permanece constante se  $r = 0$ .

Em suma, se  $r > 0$  as possibilidades são: (a) uma função exponencial decrescente  $e^{-rt}$  e

(b) uma função exponencial crescente  $e^{rt}$ . Quando os autovalores são reais, a solução geral  $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$  só é decrescente quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são negativos (veja figura 2.4). Se os autovalores são complexos ( $\lambda_{1,2} = r \pm ci$ ), a solução geral  $\mathbf{X}(t) = e^{rt}(c_1 \cos(ct) + c_2 \sin(ct))$  será uma função oscilatória, cuja amplitude aumentará se a parte real dos autovalores for positiva ( $r > 0$ ), diminuirá se a parte real for negativa ( $r < 0$ ), se  $r = 0$ , a amplitude será constante conforme ilustrado na figura 2.5.

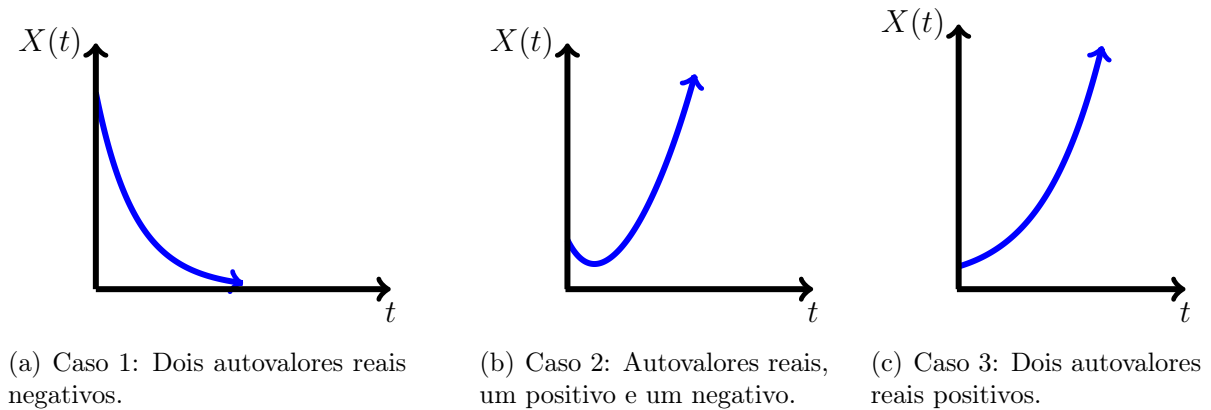


Figura 2.4:  $\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ , com  $\lambda_1, \lambda_2$  reais. Adaptado de Keshet (2005).

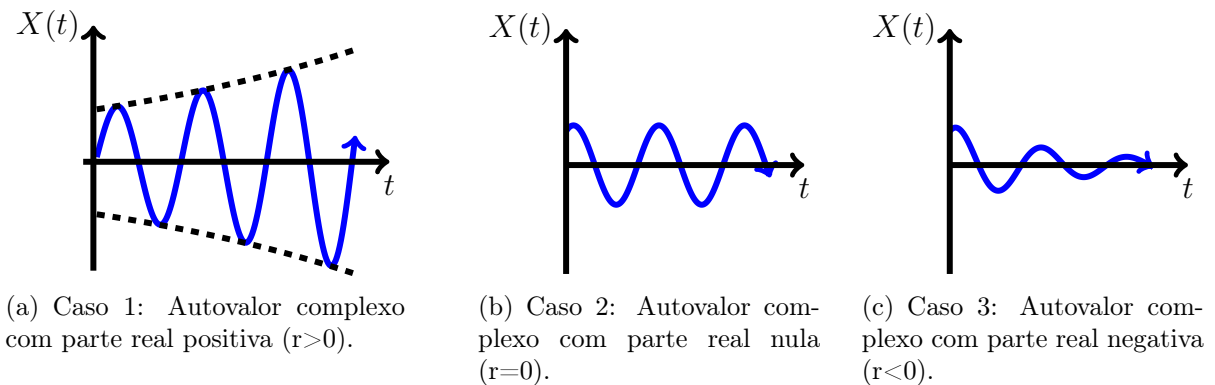


Figura 2.5:  $\mathbf{X}(t) = e^{rt}(c_1 \cos ct + c_2 \sin ct)$ , com  $\lambda = r \pm ci$ . Adaptado de Keshet (2005).

Uma questão muito importante no estudo de equações diferenciais, bem como de sistemas de equações diferenciais consiste na discussão sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio, dedicamos nossa atenção a esta análise na seção a seguir.

### 2.3.9 Estabilidade de um Estado de Equilíbrio

Na seção anterior exploramos soluções para sistemas de equações lineares, do tipo (2.38a,b) e concluímos que as quantidades essenciais foram os autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

onde  $\beta = a_{11} + a_{22}$  e  $\gamma = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Vimos também que, quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são números reais e distintos, as soluções para o sistema (2.38a,b) têm as partes dependentes do tempo

$$e^{\lambda_1 t} \quad e^{\lambda_2 t} \quad (2.52)$$

Agora, temos condições de resolver o problema de estabilidade de uma solução estacionária (abordada na seção 2.4.7), isto é, se os pequenos desvios do curso estável (2.35a,b) vão crescer (instabilidade) ou diminuir (estabilidade). Uma vez que esses desvios satisfazem uma equação diferencial ordinária linear, a análise de estabilidade depende se uma combinação linear de (2.52) vai crescer ou diminuir.

Consideremos os seguintes casos:

- 1)  $\lambda_1, \lambda_2$  são autovalores reais.
- 2)  $\lambda_1, \lambda_2$  são autovalores complexos conjugados:

$$\lambda_{1,2} = r \pm ci, \quad r = \beta/2, \quad c = \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}.$$

No primeiro caso, tanto  $e^{\lambda_1 t}$  quanto  $e^{\lambda_2 t}$  devem decrescer, ou seja,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  devem ser ambos negativos. No segundo caso, exigimos que  $e^{rt}$  decresça, (confira as equações (2.50) e (2.51)), o que implica exigir que  $r$  (parte real de  $\lambda$ ) seja negativo.

Assim, em um modelo contínuo um estado de equilíbrio será estável se os autovalores reais associados ao problema linearizado forem ambos negativos, ou caso os autovalores sejam complexos, a parte real seja negativa, isto é,

$$\text{Re}\lambda_i < 0, \quad \forall i.$$

No primeiro caso, vamos discutir as condições necessárias e suficientes para que  $\lambda_{1,2} < 0$ . Temos que

$$\lambda_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

Devemos ter  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  negativos. Para que  $\lambda_1 < 0$  é essencial que tenhamos  $\beta < 0$ , note que essa condição implica que sempre teremos  $\lambda_2 < 0$ . Devemos ter também

$$|\beta| > \sqrt{\beta^2 - 4\gamma},$$

pois, caso contrário, o radical dominaria  $\beta$ . Elevando ambos os membros da igualdade acima ao quadrado obtemos

$$\beta^2 > \beta^2 - 4\gamma$$

de onde segue que  $0 > -\gamma$  o que implica  $\gamma > 0$ . Disto, o estado de equilíbrio será estável se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\beta = a_{11} + a_{22} < 0, \quad (2.53a)$$

$$\gamma = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \quad (2.53b)$$

Agora, voltemos ao contexto da seção (2.4.7). Um estado estacionário  $(\bar{X}, \bar{Y})$  de um sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= F(X, Y) \\ \frac{dY}{dt} &= G(X, Y) \end{aligned}$$

será estável se

$$F_x(\bar{X}, \bar{Y}) + G_y(\bar{X}, \bar{Y}) < 0$$

e

$$F_x(\bar{X}, \bar{Y})G_y(\bar{X}, \bar{Y}) - F_y(\bar{X}, \bar{Y})G_x(\bar{X}, \bar{Y}) > 0$$

onde os termos são as derivadas parciais de  $F$  e  $G$  em relação a  $X$  e  $Y$ , calculadas no estado estacionário.

No início desta seção, destacamos a importância dos autovalores da matriz do sistema de equações lineares. Tal importância é devida ao fato de que a estabilidade de um sistema linear pode ser analisada qualitativamente através dos autovalores da matriz do sistema. Conforme destaca o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada no capítulo 3 de Sotomayor (1979):

**Teorema 2.5.** *Considere o sistema linear  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}$ , onde  $\mathbf{A}_{n \times n}$  e  $\mathbf{X}_{n \times 1}$ . Se todos os*

autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  da matriz  $\mathbf{A}$  tiverem parte real negativa (isto é,  $Re(\lambda_i) < 0$ ), então o ponto de equilíbrio  $\bar{\mathbf{X}} = 0$  é assintoticamente estável. Se algum dos autovalores  $\lambda_i$  tiver parte real positiva ( $Re(\lambda_i) > 0$ ), então o ponto de equilíbrio  $\bar{\mathbf{X}} = 0$  é instável.

Na seção a seguir analisamos a estabilidade do estado estacionário no problema do quimiostato.

### 2.3.10 Estabilidade dos Estados Estacionários no Quimiostato

Retornemos ao problema do quimiostato, vamos determinar se  $(\bar{N}_1, \bar{C}_1)$  e  $(\bar{N}_2, \bar{C}_2)$  são estados estacionários estáveis. Definindo

$$F(N, C) = \alpha_1 \left( \frac{C}{1+C} \right) N - N \quad \text{e} \quad (2.54a)$$

$$G(N, C) = - \left( \frac{C}{1+C} \right) N - C + \alpha_2 \quad (2.54b)$$

Calculando as derivadas parciais obtemos:

$$F_N(N, C) = \alpha_1 \left( \frac{C}{1+C} \right) - 1, \quad F_C(N, C) = \alpha_1 \frac{N}{(1+C)^2},$$

$$G_N(N, C) = - \frac{C}{1+C}, \quad G_C(N, C) = - \frac{N}{(1+C)^2} - 1,$$

lembrando que em  $(\bar{N}_1, \bar{C}_1)$  tem-se  $\frac{\bar{C}_1}{1+\bar{C}_1} = \frac{1}{\alpha_1}$  e, tomando

$$A = \frac{\bar{N}_1}{(1+\bar{C}_1)^2}$$

Obtemos o seguinte sistema *Jacobiano*.

$$J(\bar{N}_1, \bar{C}_1) = \begin{pmatrix} F_N(\bar{N}_1, \bar{C}_1) & F_C(\bar{N}_1, \bar{C}_1) \\ G_N(\bar{N}_1, \bar{C}_1) & G_C(\bar{N}_1, \bar{C}_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 A \\ -1/\alpha_1 & -(A+1) \end{pmatrix}$$

assim,  $\beta = Tr(J) = -(A+1)$  e  $\gamma = det(J) = A$ . Para o estado estacionário  $(\bar{N}_1, \bar{C}_1)$  dado por (2.32a)

$$\beta < 0 \quad \text{e} \quad \gamma > 0$$

Daí resulta que, o estado estacionário é estável sempre que  $\overline{N}_1$  e  $\overline{C}_1$  em (2.32a) são positivos. Nota-se também que

$$\beta^2 - 4\gamma = (A + 1)^2 - 4A = (A - 1)^2 > 0$$

o que implica que os autovalores das equações linearizadas para  $(\overline{N}_1, \overline{C}_1)$  são sempre reais. Portanto, as soluções não são oscilatórias.

Agora, lembremos que  $(\overline{N}_2, \overline{C}_2) = (0, \alpha_2)$ , chamando  $B = \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2}$ , obtemos

$$J(\overline{N}_2, \overline{C}_2) = \begin{pmatrix} F_N(\overline{N}_2, \overline{C}_2) & F_C(\overline{N}_2, \overline{C}_2) \\ G_N(\overline{N}_2, \overline{C}_2) & G_C(\overline{N}_2, \overline{C}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 B - 1 & 0 \\ -B & -1 \end{pmatrix}$$

de onde segue que  $\beta = \text{Tr}(J) = \alpha_1 B - 2$  e  $\gamma = \det(J) = -(\alpha_1 B - 1)$ .

Note que para  $(\overline{N}_2, \overline{C}_2)$  ser estável devemos ter  $\beta < 0$  e  $\gamma > 0$ . Temos que,

$$\gamma > 0 \Rightarrow -\left(\alpha_1 \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} - 1\right) > 0 \Rightarrow -\alpha_1 \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} > -1 \Rightarrow \alpha_1 \alpha_2 < 1 + \alpha_2.$$

Por outro lado,  $(\overline{N}_1, \overline{C}_1)$  são positivos se  $\alpha_1 > 1$  e  $\alpha_2 - \frac{1}{\alpha_1 - 1} > 0$ . Observe que,

$$\alpha_2 - \frac{1}{\alpha_1 - 1} > 0 \Leftrightarrow \alpha_2 > \frac{1}{\alpha_1 - 1} \Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 > 1 + \alpha_2.$$

Mas,

$$\alpha_1 \alpha_2 > 1 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \alpha_2 - (1 + \alpha_2) > 0 \Rightarrow \alpha_1 \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} - 1 > 0 \Rightarrow -\left(\alpha_1 \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} - 1\right) < 0.$$

De onde segue que  $\gamma < 0$ . Portanto,  $(\overline{N}_2, \overline{C}_2)$  não é estável. Assim,  $(\overline{N}_2, \overline{C}_2)$  é estável somente quando  $(\overline{N}_1, \overline{C}_1)$  não existe.

Essencialmente, podemos interpretar os resultados de forma que informações úteis do processo podem ser obtidas a partir de análises matemáticas do modelo quimiostato. Em suma, um modelo quimiostato funcionando de forma sensata deverá sempre ter uma solução no estado de equilíbrio estável (2.32a) com bactérias que povoam a câmara de cultura. Note que este equilíbrio só faz sentido biologicamente se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  satisfazem as

desigualdades

$$\alpha_1 > 1, \quad (2.55a)$$

$$\alpha_2 > \frac{1}{\alpha_1 - 1} \quad (2.55b)$$

restrições estas que devem ser satisfeitas para evitar valores negativos, da população de bactérias  $\overline{N}_1$  e da concentração de nutrientes  $\overline{C}_1$ .

Lembrando que

$$\alpha_1 = \frac{k_{max}V}{F}, \quad (2.56a)$$

$$\alpha_2 = \frac{C_0}{k_n} \quad (2.56b)$$

assim, a condição (2.55a) implica

$$k_{max} > \frac{F}{V} \quad (2.57)$$

note que ambos os lados dessa desigualdade têm dimensões 1/tempo. Portanto, podemos reescrever como:

$$\frac{1}{k_{max}} < \frac{V}{F} \quad (2.58)$$

Observe que  $k_{max}$  é a taxa máxima de reprodução bacteriana, ou seja, na presença ilimitada de nutrientes  $dN/dt \approx k_{max}N$ . Assim,  $1/k_{max}$  é proporcional ao tempo de duplicação da população bacteriana.  $V/F$  é o tempo que leva para substituir todo o volume de fluido na câmara de cultura por nutriente novo. A desigualdade (2.58) revela que, se o tempo de duplicação bacteriana  $\tau_2$  for menor do que o tempo de esvaziamento da câmara, as bactérias serão evacuadas mais rapidamente do que serão renovadas pela reprodução. A desigualdade (2.55b) pode ser reescrita em termos do valor de equilíbrio  $\overline{C}_1 = 1/(\alpha_1 - 1)$ , ou seja,

$$\alpha_2 = \frac{C_0}{k_n} > \overline{C}_1, \quad (2.59)$$

ou

$$\frac{F}{V} \frac{k_n}{k_{max} - F/V} < C_0 \quad (2.60)$$

Como  $\widehat{C} = k_n$  é a concentração de referência utilizada para tornar as equações (2.23a,b) adimensionais, vemos que

$$\overline{C} = \widehat{C}\overline{C}_1 = k_n\overline{C}_1$$

é o estado estacionário carregando dimensão original (Cujas unidades são massa por unidade de volume). Desta forma, de (2.59) temos que

$$C_0 > \overline{C} \quad (2.61)$$

isto significa que a concentração de nutrientes na câmara não pode exceder a concentração da reserva de nutrientes.

Vale ressaltar que analisar a estabilidade de um ponto de equilíbrio usando os autovalores da matriz jacobiana de um sistema funciona bem para sistemas  $2 \times 2$ . Porém, para sistemas de ordem maior, essa técnica pode se tornar muito difícil e complicada. Um método que contorna tal dificuldade é o critério de Routh-Hurwitz, nosso objeto de estudo na próxima seção.

### 2.3.11 Critério de Routh-Hurwitz

Existem vários critérios de estabilidade, por exemplo o critério de Nyquist, o critério de Lyapunov, bem como nosso objeto de estudo, o critério de Routh-Hurwitz. Os conceitos apresentados nesta seção estão fundamentados em Geromel e Korogui (2011).

Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.62)$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $x$  é uma matriz  $n \times 1$ , e

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i; \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (2.63)$$

o polinômio característico da matriz  $A$ .

**Definição 2.7.** *Um sistema do tipo (2.62) é assintoticamente estável se todas as raízes de 2.63 estiverem localizadas na região  $Re(\lambda) < 0$ .*

O resultado a seguir fornece uma condição necessária para que as raízes de (2.63)



estejam localizadas no semiplano esquerdo complexo.

**Lema 2.2.** *Uma condição necessária para que todas as raízes de  $P(\lambda) = 0$  estejam localizadas na região  $Re(\lambda) < 0$  é que  $a_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, (n-1)$*

**Demonstração:** O polinômio  $P(\lambda)$ , com todas as suas raízes na região  $Re(\lambda) < 0$ , pode ser fatorado na forma:

$$P(\lambda) = a_n \prod_i (\lambda + r_i) \prod_j (\lambda^2 + 2\sigma_j \lambda + (\sigma_j^2 - \omega_j^2)) \quad (2.64)$$

onde  $-r_i$  são suas raízes reais e  $-\sigma_j \pm i\omega_j$  com  $\sigma_j > 0$  e  $\omega_j > 0$  são suas raízes complexas conjugadas. Como todas as parcelas de primeira e de segunda ordens na equação (2.64) têm coeficientes positivos, o mesmo ocorre com  $P(\lambda)$ . ■

**Observação 2.3.** *A condição do lema anterior é apenas necessária. Pois, por exemplo, a equação algébrica  $2s^3 + s^2 + 3s + 4 = 0$  cujas raízes são  $\{-1, (1 \pm i\sqrt{31})/4\}$ , possui todos os coeficientes positivos, porém duas de suas raízes não estão na região do semiplano esquerdo complexo. Portanto, a condição não é suficiente.*

O critério de Routh-Hurwitz nos fornece condições necessárias e suficientes para estabilidade assintótica de um sistema. A ideia do método consiste em construir uma tabela chamada *Tabela de Routh* associada à equação (2.63), dada por:

$\lambda^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$
$\lambda^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$
$\lambda^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$
$\lambda^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$
$\vdots$	$\dots$			
$\lambda^1$	$\dots$			
$\lambda^0$	$\dots$			

(2.65)

onde as duas primeiras linhas são preenchidas com os coeficientes de  $P(\lambda)$  e cada linha subsequente é determinada a partir das duas linhas anteriores através da seguinte regra:

$$\begin{aligned}
b_1 &= (a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3})/a_{n-1} \\
b_2 &= (a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5})/a_{n-1} \\
b_3 &= \dots \\
c_1 &= (b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2)/b_1 \\
c_2 &= \dots
\end{aligned} \tag{2.66}$$

**Teorema 2.6.** *Considere que a tabela de Routh (2.65) foi obtida para a equação algébrica  $P(\lambda) = 0$ . Então*

- (i) *Todas as raízes estão situadas na região  $Re(\lambda) < 0$  se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna da tabela de Routh forem positivos.*
- (ii) *O número de raízes situadas na região  $Re(\lambda) > 0$  é igual ao número de trocas de sinal nos elementos da primeira coluna da tabela de Routh.*

O primeiro item deste teorema fornece uma condição necessária e suficiente para estabilidade de um sistema dinâmico e é conhecido como critério de Routh-Hurwitz.

O cálculo da tabela de Routh requer que todos os elementos da primeira coluna sejam diferentes de zero. Se, durante a construção da tabela, ocorrer um elemento nulo na primeira coluna de uma linha qualquer, então devemos considerar dois casos especiais:

- (i) Todos os demais elementos da linha são nulos: Neste caso, o polinômio  $P(\lambda)$  é divisível pelo polinômio gerador da linha anterior  $A(s)$ . Substituímos a linha nula pela linha gerada por  $A'(s)$ .
- (ii) Algum dos demais elementos da linha não é nulo: Neste caso, substitui-se o elemento nulo por  $\epsilon > 0$ , determina-se a tabela limite para  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Note que, em virtude do item (i) do teorema 2.6, se algum dos casos especiais ocorrer, isso implica que alguma raiz da equação (2.63) estará contida na região  $Re(\lambda) \geq 0$  e portanto o ponto de equilíbrio não será assintoticamente estável. Observe também que o item (ii) do teorema 2.6 continua sendo válido mesmo em situações em que os casos especiais venham, por ventura, ocorrer. E, assim, podemos determinar quantas raízes se encontram na região  $Re(\lambda) > 0$ .

**Exemplo 1.** *Analisar a estabilidade do sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + z \\ \dot{y} = x - 2y + z \\ \dot{z} = x + y - 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 5 \\ z(0) = 8 \end{cases}$$

**Resolução:** O polinômio característico do sistema é dado por  $P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$ . De onde segue que, a tabela de Routh tem a seguinte forma:

$s^3$	1	11
$s^2$	6	6
$s^1$	10	
$s^0$	6	

Como os elementos da primeira coluna da tabela de Routh são todos positivos, segue do item (i) do teorema 2.6 que todas as raízes de  $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$  estão no semiplano esquerdo do plano complexo. Logo, pela definição 2.7, o sistema dado é assintoticamente estável.

## 3 Equação da Difusão

Neste capítulo nos dedicamos ao estudo da Equação da Difusão. Os resultados aqui apresentados estão baseados principalmente em Hobbie e Roth (2007), destacamos também outros livros clássicos da literatura como por exemplo, Cremasco (2015), Potter et al. (2004) e Keshet (2005).

### 3.1 Equação de Difusão

Buscaremos uma dedução para equação de difusão abordando o problema do fluxo de partículas ou de massa. Inicialmente, precisamos de alguns conceitos preliminares, tais como: definição de **fluxo**, **fluência** e **equação de continuidade**.

#### 3.1.1 Fluxo e Fluência

A *taxa de fluxo*, *fluxo de volume* ou *volume corrente*  $\mathbf{i}$  é definida como o volume total de material transportado por unidade de tempo ( $m^3/s$ ). Também podemos definir o fluxo de massa como a massa total transportada por unidade de tempo ou o fluxo de partículas como o número total de partículas, e assim por diante. Define-se a *fluência*  $\mathbf{j}$  das partículas como o número de partículas transportadas por unidade de área através de uma superfície imaginária ( $1/m^2$ ). A fluência de volume é o volume total transportado através da superfície e tem unidades  $m^3/m^2$ , ou  $m$ . A *taxa de fluência* ou *densidade de fluxo* é a quantidade de algo transportado por unidade de área por segundo. Esta segunda quantidade será também denotada por  $\mathbf{j}$  e tem unidades  $1/(m^2s)$ . É comum usar o índice para especificar o que está sendo transportado:  $\mathbf{j}_s$  é a *taxa de fluência* de partículas de soluto  $1/(m^2s)$ ,  $\mathbf{j}_m$  é a taxa de fluência de massa ( $kgm^{-2}s^{-1}$ ), e  $\mathbf{j}_v$  é o volume de densidade de fluxo ( $m^3/(m^2s)$  ou  $m/s$ ). Em um fluido,  $\mathbf{j}_v$  é a velocidade com que o fluido se move.

### 3.1.2 Equação de Continuidade Unidimensional e Tridimensional

#### 3.1.2.1 Equação Unidimensional

Quando estamos lidando com substâncias que não apresentam transformações (como em uma reação química ou decaimento radioativo), observamos que o número de partículas ou a massa, ou volume (no caso de um líquido incompressível), é conservado ou permanece constante. Esta conservação leva a uma equação muito útil chamada *equação de continuidade*, que aqui, será derivada em termos do número de partículas.

Primeiro vamos abordar o caso unidimensional. Seja  $j_s$  a taxa de fluência de partículas por unidade de área por unidade de tempo, passando por um ponto, conforme figura 3.6. Todos os movimentos ocorrem na direção  $x$  ao longo de um tubo cuja área  $S$  da secção transversal é constante. O valor de  $j$  pode depender da posição no tubo e do tempo, isto é,  $j = j(x, t)$ .

O número de partículas do volume entre  $x$  e  $x + \Delta x$  é denotado por  $N(x, t)$ . Em  $x$  pode haver partículas que se movem tanto para a direita, quanto para a esquerda; o número líquido para a direita durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  é  $j(x, t)$  vezes a área  $S$  vezes  $\Delta t$ . A densidade de fluxo na direção  $x$  é chamada positiva. A quantidade líquida de partículas em  $x$  é  $j(x, t)S\Delta t$ . Da mesma forma, o número de líquido para fora em  $x + \Delta x$  é  $j(x + \Delta x, t)S\Delta t$ . Assim, se combinarmos estas relações obtemos que o aumento líquido do número de partículas no volume  $S\Delta x$  é dado por:

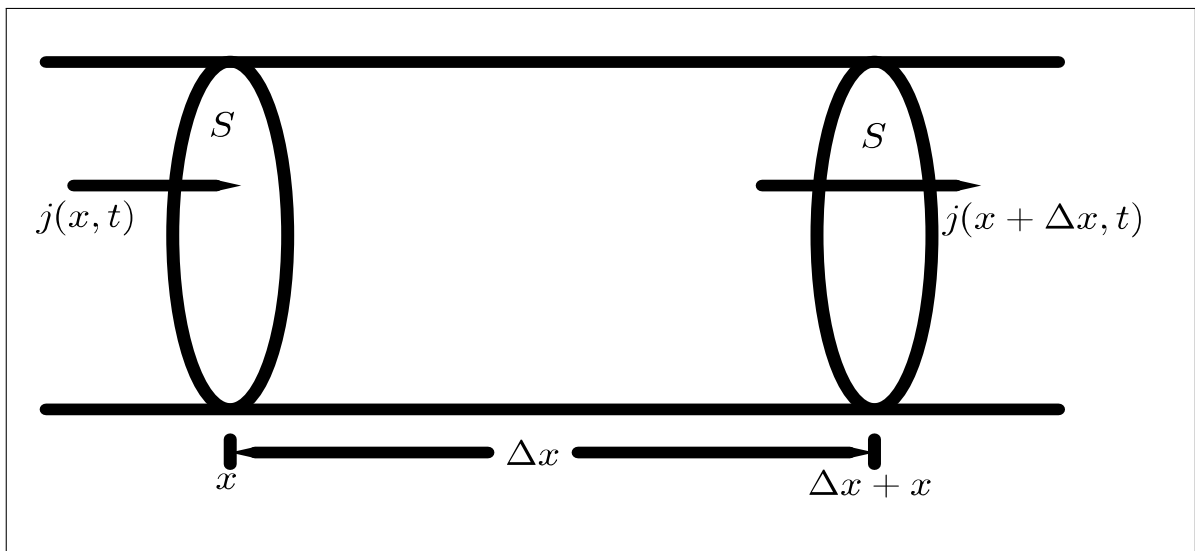


Figura 3.6: As taxas de fluência para a equação de continuidade unidimensional. Fonte: adaptado de Hobbie e Roth (2007)

$$\Delta N = [j(x, t) - j(x + \Delta x, t)]S\Delta t. \quad (3.67)$$

Fazendo  $\Delta x \rightarrow 0$ , a quantidade envolvendo  $j$  é, por definição, a derivada parcial de  $j$  com relação a  $x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{j(x, t) - j(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}$$

Analogamente, o crescimento de  $N(x, t)$  é dado por

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(x, t + \Delta t) - N(x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

substituindo essas duas expressões em (3.67) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}N(x, t) = -(S\Delta x)\frac{\partial}{\partial x}j(x, t)$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima pelo volume  $S\Delta x$ , podemos escrever esta equação em termos da concentração  $C(x, t)$  da seguinte forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}. \quad (3.68)$$

Esta é a equação de continuidade unidimensional.

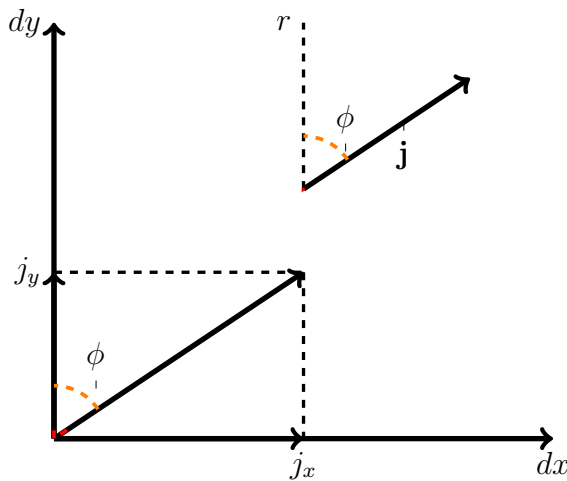
### 3.1.2.2 Equação Tridimensional

Em três dimensões  $\mathbf{j}$  é um vetor com componentes  $j_x, j_y$  e  $j_z$ . O fluxo através de uma superfície orientada  $dS$  em alguma direção arbitrária com os eixos  $x, y, z$  é igual à componente de  $\mathbf{j}$  perpendicular à superfície vezes  $dS$ . Para ver isso, imagine que  $\mathbf{j}$  está no plano  $xy$  com componentes  $j_x$  e  $j_y$ . Se  $\mathbf{j}$  faz um ângulo  $\phi$  com a vertical, então  $j_x = j \sin \phi$ ,  $j_y = j \cos \phi$  (veja figura 3.7a). A observação 3.4 justifica a existência do termo  $dr$  na figura 3.8a. Como  $\mathbf{j}$  está no plano  $xy$ , podemos desprezar a face formada pelos lados  $dy, dr, dx$ . Pois, essa face é paralela à  $\mathbf{j}$ , e portanto o fluxo é nulo.

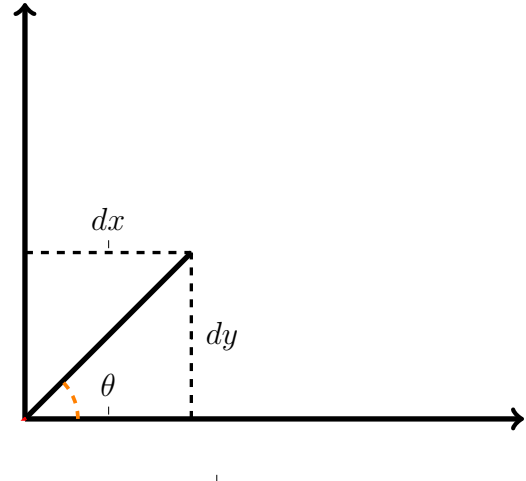
**Observação 3.4.** *Ao transformarmos coordenadas retangulares em coordenadas polares*

obtemos,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dr \cos \theta \\ dy = dr \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (dx)^2 = (dr)^2 \cos^2 \theta \\ (dy)^2 = (dr)^2 \sin^2 \theta \end{cases} \Rightarrow (dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2$$

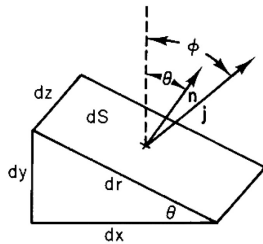


(a) Ilustração para  $j_x = j \sin \phi$ .

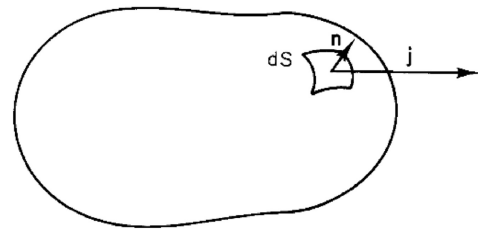


(b) Esquema para ilustrar o ângulo  $\theta$  da figura 3.8(a).

Figura 3.7: Esquemas ilustrativos da igualdade  $j_x = j \sin \phi$  e do ângulo  $\theta$ .



(a) Volume usado para relacionar a taxa de fluência através da face oblíqua com os componentes da taxa de fluência paralela aos eixos  $x$  e  $y$ .



(b) O número total de partículas por segundo que passa através da superfície fechada (fluxo) é a soma das contribuições  $j_n dS$  de todos os elementos da superfície.

Figura 3.8: Deduzindo a forma integral da equação de continuidade. Fonte: Hobbie e Roth (2007).

Considere o volume mostrado na figura 3.8(a), pequeno. Se não houver acúmulo de partículas dentro do volume, pelo princípio da conservação de massa, o fluxo através das duas faces paralelas aos eixos é igual ao fluxo através de  $dS$ . A área  $dS$  da superfície inclinada é  $drdz$ , onde  $dz$  é a espessura do volume perpendicular ao papel. O número de partículas por segundo através da face  $dydz$  é dado pelo produto da densidade do

fluxo vezes a área da face, ou seja,  $j_x dydz = (j \sin \phi)(dydz)$ . Como  $dy = dr \sin \theta$ , segue que  $j_x dydz = j \sin \phi \sin \theta dzdr$ . Da mesma forma, o número de partículas por segundo em toda a face inferior é  $j_y dxdz = j \cos \phi \cos \theta dzdr$ . Consiste do fato de  $\mathbf{j}$  está no plano  $xy$  que a soma destes deve ser igual ao número de partículas que sai pela face oblíqua:  $jdzdr(\sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \theta) = jdzdr \cos(\phi - \theta) = j dS \cos(\phi - \theta)$ . O número de partículas por unidade de área por segundo que deixa esse volume é  $j \cos(\phi - \theta)$ . Agora,  $\phi - \theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{j}$  e o vetor unitário  $\hat{\mathbf{n}}$  perpendicular à superfície.

Note que  $Proj_n \mathbf{j} = \frac{<\mathbf{j}, \mathbf{n}>}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = <\mathbf{j}, \mathbf{n}> \mathbf{n}$ . Dessa forma, podemos escrever a densidade de fluxo através de  $dS$  como  $\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  (o produto de  $\mathbf{j}$  e o normal), ou  $j_n$  (a componente de  $\mathbf{j}$  paralela a  $\hat{\mathbf{n}}$ ). Assim, o fluxo por segundo pode ser escrito de várias formas, como:

$$(\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}})dS, \quad j_n dS \quad \text{ou} \quad (\mathbf{j} d\mathbf{S}) \quad (3.69)$$

Essas expressões são equivalentes, pois o vetor  $d\mathbf{S}$  é definido como tendo magnitude  $dS$  e aponta ao longo do normal para a superfície que aponta para fora do volume fechado. O mesmo resultado é obtido quando  $\mathbf{j}$  não está no plano  $xy$ .

### 3.1.2.3 A Forma Integral da Equação de Continuidade

Se considerarmos um volume fechado (veja figura 3.8b), o número total de partículas que fluem para fora do volume pode ser obtido adicionando a contribuição de cada elemento  $dS$ . Isto é, o número total de partículas no tempo  $\Delta t$  é dado por:

$$\left( \iint_{S_f} j_n dS \right) \Delta t$$

onde  $S_f$  é uma superfície fechada. Como o número total de partículas no volume fechado é dado por:

$$\iiint_V C(x, y, z, t) dx dy dz$$

onde  $V$  é um volume fechado. Note que podemos escrever  $dV = dx dy dz$ . Portanto, obtemos a forma integral da equação de continuidade, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V C dV = - \iint_{V_s} j_n dS. \quad (3.70)$$



Onde  $V_s$  é o volume delimitado pela superfície. A densidade do fluxo de saída ou taxa de fluência da substância integrada sobre uma superfície fechada (o fluxo líquido através da superfície) é igual à taxa de diminuição da quantidade de substância dentro do volume delimitado pela superfície.

Para avaliar a superfície integral melhor, ilustramos com um exemplo. Considere primeiro um volume definido por uma esfera de raio  $r$ . Dentro da esfera tem uma lâmpada irradiando luz uniformemente em todas as direções. A luz sai pela superfície da esfera. A quantidade de energia luminosa no volume definido pela esfera não está mudando, então a taxa de produção de energia pela lâmpada  $P$  é igual ao fluxo de energia através da superfície externa da esfera:

$$P = \iint j_n dS. \quad (3.71)$$

Devido à simetria esférica,  $\mathbf{j}$  é perpendicular à superfície e, isto ocorre em todos os pontos da esfera. Portanto,

$$P = j_n \iint dS.$$

Sabemos que a integral de  $dS$  sobre a superfície de uma esfera de raio  $r$  é  $4\pi r^2$ , portanto

$$j = j_n = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (3.72)$$

#### 3.1.2.4 A forma Diferencial da Equação de Continuidade

A equação de continuidade pode ser expressa em termos de derivadas em vez de integrais. Para deduzir esta forma, considere um volume localizado em um retângulo pequeno em  $(x, y, z)$  e tendo lados  $(dx, dy, dz)$  como mostrado na figura 3.9. Aplicando a equação (3.70) para cada face do volume. A taxa com a qual a substância flui através da face em  $x$  é  $j_x(x)(dydz)$ . O lado  $x + dx$  flui para fora a uma taxa  $j_x(x + dx)dydz$ . Note que não há contribuição para o fluxo deste lado através de  $j_y$  ou  $j_z$ , uma vez que são paralelos a este lado. O crescimento líquido de partículas no volume é

$$-[j_x(x + dx) - j_x(x)]dydz = -\frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Termos semelhantes podem ser escritos para as faces perpendiculares aos eixos  $y$  e  $z$ . A quantidade total da substância que entra no volume por unidade de tempo é a taxa

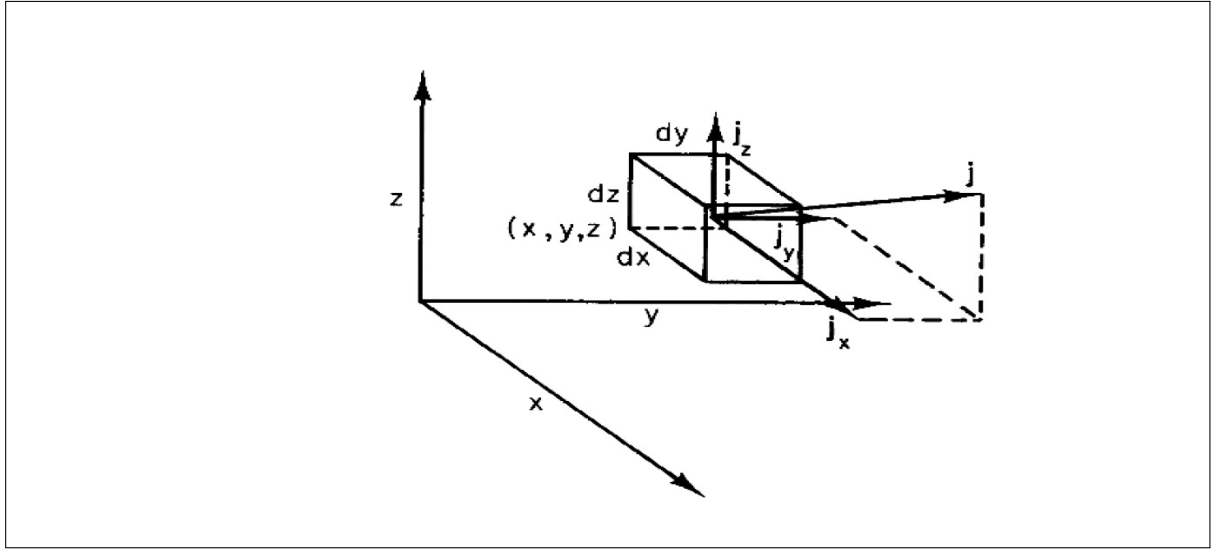


Figura 3.9: Volume usado para deduzir a forma diferencial da equação de continuidade. Fonte: Hobbie e Roth (2007)

de mudança da quantidade dentro do volume, que é a taxa de mudança de concentração vezes o volume  $dx dy dz$ . Portanto,

$$\frac{\partial C}{\partial t}(dx dy dz) = - \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) (dx dy dz)$$

ou

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \quad (3.73)$$

Esta é a forma diferencial da equação de continuidade. A equação (3.68) é um caso especial da equação (3.73) quando  $\mathbf{j}$  é paralelo ao eixo  $x$ . Note que o lado direito da equação (3.73) é o divergente de  $\mathbf{j}$ . Isto é,

$$\text{div } \mathbf{j} = \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Assim, a equação de continuidade é dada por

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{j} \quad (3.74)$$

A forma diferencial da equação da continuidade dada por (3.74) é equivalente à forma integral, dada pela equação (3.70). A equação de continuidade diz que a taxa de diminuição da quantidade de uma substância conservada numa determinada região expressa por  $-\frac{\partial C}{\partial t}$  é igual à taxa a qual ela deixa a região expressa como o fluxo através da superfície

da região circundante. A substância pode ser um certo tipo de molécula, carga elétrica, calor ou massa. Se for carga elétrica,  $\mathbf{j}$  é a corrente elétrica por unidade de área e  $C$  é a carga por unidade de volume. Se for massa,  $C$  é a massa por unidade de volume ou densidade  $\rho$ . A equação de continuidade é encontrada em muitos contextos; em cada um expressa a conservação de alguma quantidade.

## 3.2 Difusão: Leis de Fick

A difusão é o movimento aleatório de partículas de uma região de maior concentração para uma região de menor concentração. As partículas se movem independentemente umas das outras. Pode haver colisão com as moléculas do fluido no qual estão imersas, mas dificilmente colidem entre si. O fluido circundante pode estar em repouso, neste caso, a difusão é o único meio para o transporte do soluto, ou pode estar fluindo, neste caso, o fluido carrega o soluto junto com ele. Ambos os efeitos podem ocorrer em conjunto. Vamos considerar primeiro a difusão a partir de um ponto macroscópico e buscaremos escrever uma equação diferencial para descrevê-lo. Em seguida, obtemos uma segunda equação que descreve a difusão, combinando-a com a equação de continuidade.

Suponhamos que o solvente envolvente não se mova. Se a concentração de soluto for completamente uniforme, não há fluxo líquido. Como muitas partículas se movem tanto para a esquerda como para a direita, e a concentração permanece a mesma. Haverá flutuações locais na concentração.

No entanto, se a concentração é maior na região  $A$  do que na região  $B$  que está à direita de  $A$ , há mais partículas a se mover à direita, de  $A$  para  $B$ , do que para se mover à esquerda, de  $B$  para  $A$  (vide figura 3.10). Se o problema é unidimensional, não há fluxo líquido se  $\partial C/\partial x = 0$ , mas existe fluxo se  $\partial C/\partial x \neq 0$ . Se a diferença de concentração é pequena, então a densidade de fluxo  $\mathbf{j}$  é linearmente proporcional ao gradiente de concentração  $\partial C/\partial x$ . Assim, temos a seguinte equação

$$j_x = -D \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (3.75)$$

onde  $D$  é chamada constante ou coeficiente de difusão, definido por Cremasco (2015) como sendo a mobilidade do soluto no meio e é governada pela interação soluto-meio. O entendimento da difusividade (ou do coeficiente de difusão) se faz importante no sentido de

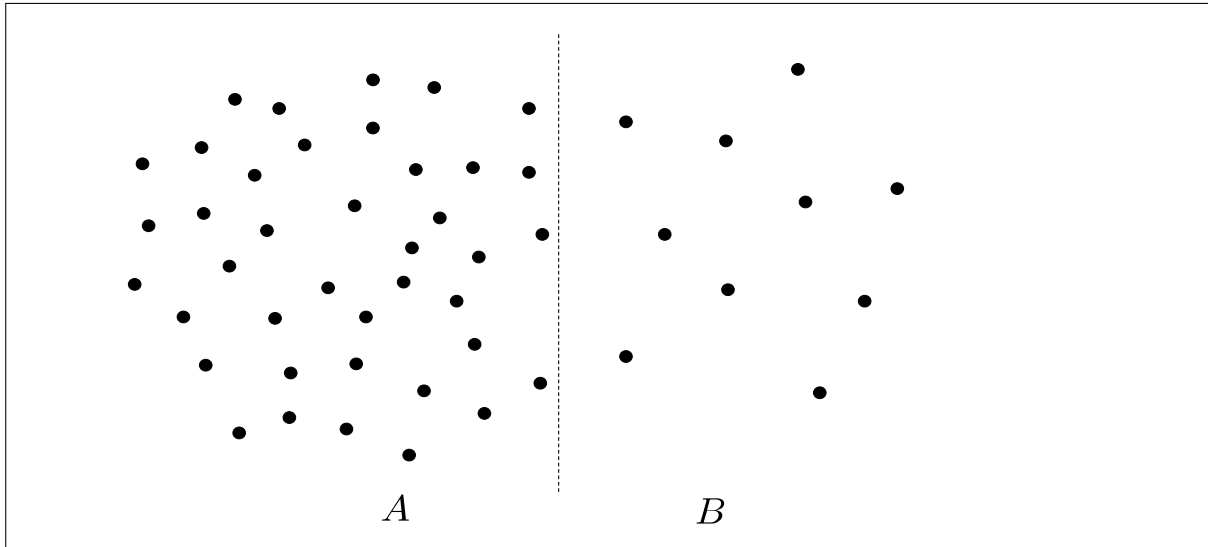


Figura 3.10: Exemplo de difusão: Cada partícula em  $A$  e  $B$  tem a mesma probabilidade de se movimentar para direita e para esquerda. Porém, há mais moléculas em  $A$  para se movimentar para direita do que moléculas em  $B$  para se movimentar para esquerda. Existe um fluxo líquido de moléculas de  $A$  para  $B$ . Fonte: adaptado de Hobbie e Roth (2007)

que, ao procurarmos compreendê-lo, a difusão em si estará compreendida.

As unidades de  $D$  são  $m^2/s$ , como pode ser visto observando-se que as unidades de  $j$  são  $(algo)/(m^2s)$  e as unidades de  $\partial C/\partial x$  são  $(algo)/m^4$ . Essa relação é chamada de *primeira lei de Fick* de difusão. O sinal de subtração mostra que o fluxo ocorre da direção de maior concentração para menor concentração: se  $\partial C/\partial x$  é positivo, o fluxo flui na direção  $-x$ . A *primeira lei de Fick* é uma das muitas formas da equação de transporte. Se o processo não for linear, podemos pensar como o primeiro termo da expansão de uma série de Taylor.

### 3.2.1 Segunda Lei de Fick

A primeira lei de difusão de Fick, equação (3.75), significa que, para pequenos gradientes de concentração, a densidade de fluxo difusivo é proporcional ao gradiente de concentração  $j_x = -D\partial C/\partial x$ . Diferenciando, obtemos

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = -D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Analogamente, obtém-se equações semelhantes para as direções  $y$  e  $z$ . A equação de continuidade (3.68), é

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Se combinarmos estas duas equações, obtemos a segunda lei de difusão de Fick, também conhecida como equação de difusão:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (3.76)$$

A primeira lei relaciona o fluxo de partículas ao gradiente de concentração. A segunda lei diz como a concentração em um ponto muda com o tempo. Esta última é a combinação da primeira lei de Fick com a equação de continuidade. Observe que o lado direito da equação (3.76) é o *Laplaciano* de  $C$ , que é, frequentemente, abreviado por  $\nabla^2 C$  ou  $\Delta C$ .

A princípio, se conhecermos  $C(x, y, z, t)$  no tempo inicial  $t = 0$ , a equação (3.76) pode ser resolvida para  $C(x, y, z, t)$  em todos os tempos posteriores. Também podemos olhar para esta equação localmente, dizendo como  $C$  muda com o tempo em algum ponto se soubermos como a concentração muda com a posição na vizinhança desse ponto. A mudança de concentração com a posição determina o fluxo  $\mathbf{j}$ . As mudanças no fluxo com a posição determinam como a concentração muda com o tempo.

Existe uma extensa literatura sobre como resolver a equação de difusão (ou a equação do fluxo de calor, que é a mesma coisa), ao invés de discutir um grande número de técnicas, buscaremos mostrar por substituição que uma função de distribuição gaussiana ou normal, se distribuindo de uma certa maneira com o tempo, é uma solução para equação (3.76). Uma característica importante da solução gaussiana é que o centro da distribuição de concentração não se move.

Por simplicidade, consideremos o caso unidimensional. Para isto, tomamos uma distribuição centrada na origem tal que

$$C(x, t) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-x^2/2\sigma^2(t)} \quad (3.77)$$

No caso unidimensional, podemos analisar de duas maneiras. (i) Se representa a difusão ao longo de um tubo, então  $C(x, t)$  é o número de partículas por unidade de comprimento na faixa entre  $x$  e  $x + dx$ , e  $N$  é o número total de partículas. (ii) Se representa um problema tridimensional com a concentração mudando apenas na direção

$x$ , então  $C(x, t)$  é o número de partículas por unidade de volume e  $N$  é o número de partículas por unidade de área.

Note que a versão unidimensional da equação (3.76) é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.78)$$

Agora, mostraremos que a equação (3.77) é uma solução para versão unidimensional da equação (3.76). Calculando (pela regra da cadeia) as derivadas parciais  $\partial C/\partial t$  e  $\partial^2 C/\partial x^2$  da equação (3.77) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} + \frac{x^2}{\sigma^4} e^{-x^2/2\sigma^2} \right) \frac{d\sigma}{dt}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\sigma^3} e^{-x^2/2\sigma^2} + \frac{x^2}{\sigma^5} e^{-x^2/2\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

substituindo na equação (3.78) obtemos

$$\frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} \left( -1 + \frac{x^2}{\sigma^2} \right) \frac{d\sigma}{dt} = D \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-x^2/2\sigma^2} \left( -1 + \frac{x^2}{\sigma^2} \right).$$

Dividindo ambos os lados desta igualdade por  $\frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$  (este fator é sempre diferente de zero), obtemos

$$\left( \frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{d\sigma}{dt} = \frac{D}{\sigma} \left( \frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right). \quad (3.79)$$

Note que podemos dividir ambos os membros da equação (3.79) por  $(x^2/\sigma^2 - 1)$  para todo  $x \neq \pm\sigma$ . Essencialmente, estes valores de  $x$  são onde a segunda derivada de  $C$  se anula. Nesses pontos,  $\partial C/\partial t = 0$  para qualquer valor de  $\sigma$ . Em todos os outros pontos, a solução satisfaz a equação (3.79) somente se

$$\sigma \frac{d\sigma}{dt} = D$$

que é uma equação de variáveis separáveis, portanto

$$\int \sigma d\sigma = \int D dt$$

de onde segue que

$$\frac{1}{2}\sigma^2(t) = Dt + c_1$$

ou seja,

$$\sigma^2(t) = 2Dt + c$$

onde  $c = 2c_1$  é uma constante. Note que  $\sigma^2(0) = c$ . Disto,

$$\sigma^2(t) = 2Dt + \sigma^2(0) \quad (3.80)$$

Se a concentração for inicialmente gaussiana com variância  $\sigma^2(0)$ , após o tempo  $t$  ela ainda será gaussiana, centrada no mesmo ponto, porém, com uma variância maior dada pela equação (3.80). A figura 3.11 mostra esse espalhamento em um caso típico. Em tempos anteriores a concentração teria pico ainda mais estreito. No limite quando  $\sigma(t)$  é zero, todas as partículas estão na origem, o que levaria a uma concentração infinita. Contudo, esta situação seria impossível. No entanto, todas as partículas podem estar muito próximas da origem, dando uma curva muito alta e estreita para  $C(x)$ .

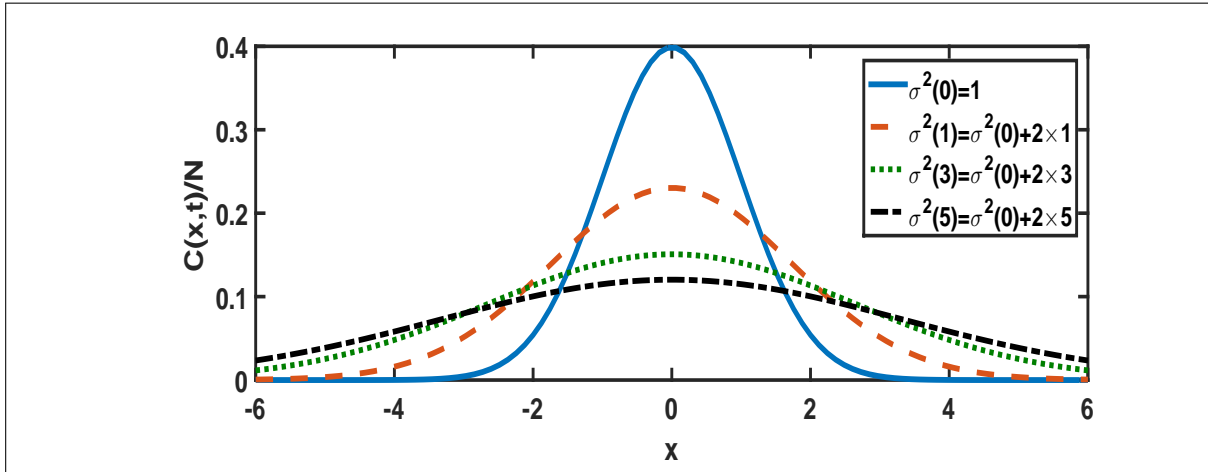


Figura 3.11: Distribuição de partículas por difusão, tomando  $D = 1$  Fonte: adaptado de Hobbie e Roth (2007).

A largura da curva, determinada por  $\sigma$ , aumenta conforme a raiz quadrada do tempo aumenta. Como o crescimento da raiz quadrada é mais lento do que o crescimento linear, isto reflete no fato de que à medida que as partículas se espalham a concentração não muda tão rapidamente com a distância, de modo que o fluxo e a taxa de propagação diminuam.

O fenômeno da difusão pode ser estendido para áreas do conhecimento como a biologia para tratar da movimentação dos indivíduos de uma espécie. Como por exemplo, tanto predador quanto presa podem movimentar-se aleatoriamente à procura de alimento.

Portanto, é razoável supor que determinada espécie tenha um “coeficiente” de mobilidade. Essas ideias serão retomadas no capítulo 5, onde descrevemos um modelo para o problema de chamado de alarme.

No capítulo a seguir apresentamos algumas técnicas computacionais de resolução de equações diferenciais, em especial as EDP's. Mais precisamente, nos ateremos ao estudo do método de diferenças finitas e os métodos de Runge-Kutta.



## 4 Métodos Numéricos

Neste capítulo discutiremos alguns métodos para resolução de equações diferenciais, mais precisamente, os métodos de Runge-Kutta e Diferenças Finitas. Os conceitos aqui apresentados estão fundamentados em Ruggiero e Lopes (1996), Cunha (2000), Burden e Faires (2008) e Gear (1971).

Equações diferenciais surgem frequentemente em modelos matemáticos que descrevem quantitativamente/qualitativamente fenômenos em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo mecânica de fluidos, fluxo de calor, problemas de economia, biologia, biomatemática, dentre outros.

Em geral, não é possível resolver analiticamente estas equações, com exceção das equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Caso em que as raízes do polinômio característico nos conduzem a um conjunto de soluções linearmente independentes que geram as soluções (particulares) com condição de contorno. Quando a equação diferencial é não-linear, o problema de encontrar soluções analíticas se agrava ainda mais.

Diante dessas dificuldades, os métodos numéricos assumem um papel fundamental no estudo de equações diferenciais. O crescente desenvolvimento computacional tem favorecido a especialização e utilização destes métodos. Em nossa abordagem os métodos consistem na discretização do contínuo, buscando viabilizar a solução da equação diferencial computacionalmente.

### 4.1 Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas consiste em transformar o problema de resolver uma equação diferencial em um problema de resolver um sistema de equações algébricas, a ideia é usar aproximações para as derivadas que aparecem na equação diferencial. Se a equação diferencial for linear, o sistema algébrico associado a ela será linear, caso a

equação diferencial seja não-linear o sistema algébrico será não-linear.

A incógnita de uma equação diferencial ordinária é uma função  $y(x)$  definida em todos os pontos do intervalo no qual busca-se uma solução. Primeiramente, devemos discretizar o intervalo limitado onde procuramos a solução. Para isso definimos uma malha, que é constituída de um número finito de pontos, chamados nós da malha.

A ideia básica para definir uma malha de passo  $h > 0$  é dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  partes iguais de comprimento  $h = (b - a)/n$ . Tomando  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ , resulta que a malha de passo  $h$  associada a  $x_0$  é o conjunto de pontos

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$$

Buscaremos aproximações para  $y(x)$  calculadas nos pontos desta malha. Para determinarmos essas aproximações, utilizamos a expansão em série de Taylor. A grande vantagem da série de Taylor consiste no fato de que as informações da função no ponto  $x$  podem ser usadas para avaliar o comportamento desta função numa vizinhança de  $x$ . Supondo que  $y(x)$  tenha derivadas contínuas até ordem  $n + 1$  em  $x$ , então a expansão de Taylor tem a seguinte forma:

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi) \quad (4.81)$$

para algum  $\xi \in (x, x + h)$ . O último termo da equação em (4.81) representa o erro da aproximação para  $y(x + h)$  pelos  $n + 1$  primeiros termos da série de Taylor.

Tomando  $n = 1$  em (4.81) obtemos a fórmula avançada para discretização da derivada e seu respectivo erro:

$$y'(x) = \frac{y(x + h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2!}y''(\xi). \quad (4.82)$$

Analogamente, se tomarmos  $x - h$  e  $n = 1$  em (4.81) obtemos a fórmula atrasada e seu respectivo erro:

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x - h)}{h} + \frac{h}{2!}y''(\xi). \quad (4.83)$$

Agora, tomando  $n = 2$  em (4.81) e escrevendo:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_1) \quad (4.84)$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_2) \quad (4.85)$$

subtraindo (4.85) de (4.84) obtemos a fórmula centrada para discretização da derivada e seu respectivo erro:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{h} + \frac{h^2}{3!}y'''(\xi). \quad (4.86)$$

Note que na fórmula centrada (4.86) obtemos uma aproximação para derivada na qual o erro é da ordem de  $h^2$ , ao passo que, nas fórmulas avançada (4.82) e atrasada (4.83) o erro é da ordem de  $h$ .

Agora, considerando  $n = 3$  em (4.81), temos

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_1) \quad (4.87)$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_2) \quad (4.88)$$

Somando (4.87) e (4.88), obtemos

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2y''(x) + 2\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi)$$

de onde segue que

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi) \quad (4.89)$$

para algum  $\xi \in (x-h, x+h)$

Em geral, no método de diferenças finitas, uma equação diferencial é obtida substituindo as derivadas por aproximações como as descritas acima. Apesar de termos obtido discretizações considerando uma malha regular ( $x_i = x_0 + ih, i = 1, 2, \dots$ ). É possível considerar uma malha irregular tomando  $h_i = x_i - x_{i-1}$  e obter outras formas de discretização.

Para deixar a notação menos carregada, usaremos as seguintes aproximações  $y_i \approx$

$y(x_i)$ ,  $y_{i+1} \approx y(x_i + h)$ ,  $y_{i-1} \approx y(x_i - h)$ . Assim, podemos reescrever as equações (4.82), (4.83), (4.86) e (4.89) da seguinte forma:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (4.90)$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad (4.91)$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (4.92)$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (4.93)$$

respectivamente.

**Exemplo 2.** *Resolva o PVC a seguir, pelo método de diferenças finitas.*

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 6y(x) = x, & x \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (4.94)$$

Fixando  $h = 1/n$  (pois,  $x_0 = 0$  e  $x_n = 1$ ), substituindo as fórmulas de aproximações (4.92) e (4.93) na equação diferencial dada, obtemos:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 6y_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

como  $x_i = ih$ , segue que

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + h \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2} - 6h^2 y_i = ih^3, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

portanto,

$$(1 - h/2)y_{i-1} - (6h^2 + 2)y_i + (1 + h/2)y_{i+1} = ih^3$$

Da primeira condição ( $y(x_0) = y_0 = 0$ ), se  $i = 1$ , então a primeira equação do sistema é:

$$-6(h^2 + 2)y_1 + (1 + h/2)y_2 = h^3.$$

Analogamente, para  $i = n - 1$  a última equação é dada por:

$$(1 - h/2)y_{n-2} - (6h^2 + 2)y_{n-1} = (n - 1)h^3.$$

Logo, para determinar  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ , precisamos resolver o sistema linear de ordem  $(n - 1)$  dado por:

$$\begin{cases} -6(h^2 + 2)y_1 + (1 + h/2)y_2 = h^3 \\ (1 - h/2)y_{i-1} - (6h^2 + 2)y_i + (1 + h/2)y_{i+1} = ih^3, \quad i = 2, 3, \dots, n - 2. \\ (1 - h/2)y_{n-2} - (6h^2 + 2)y_{n-1} = (n - 1)h^3 \end{cases}$$

Na figura 4.12 apresentamos os gráficos com aproximações usando  $n = 20$  e  $n = 50$  comparando com a solução analítica do PVC que é dada por

$$y(x) = \frac{6x - e^{2x} + 7e^{2x+3} - 7e^{3-3x} + e^{5-3x} - e^5(6x + 1) + 1}{36(e^5 - 1)}$$

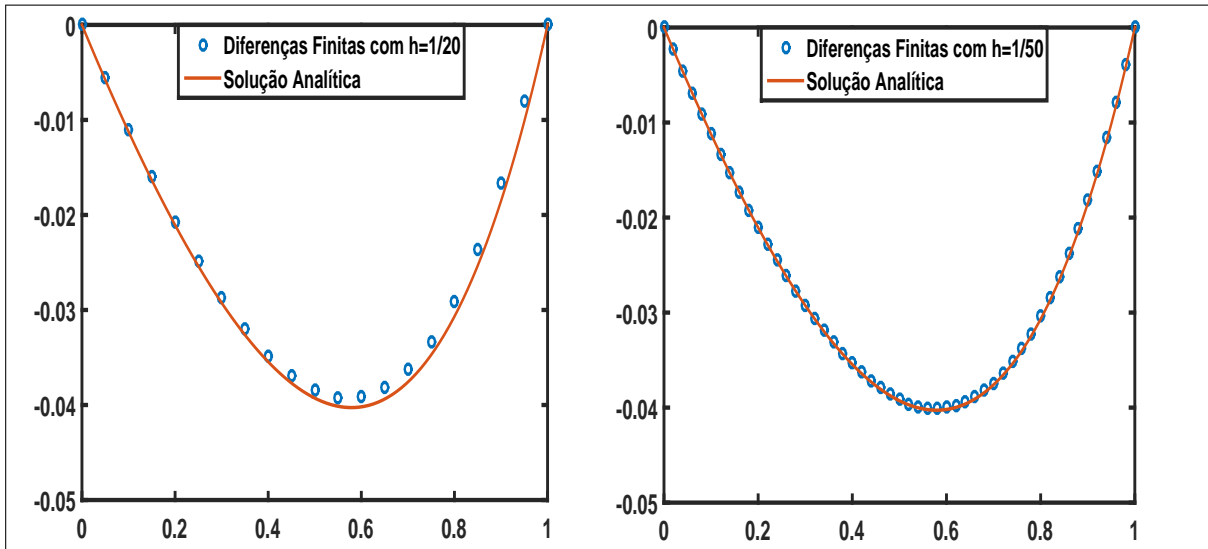


Figura 4.12: Gráficos das aproximações para  $h = 1/20$  e  $h = 1/50$  e da solução analítica do PVC (4.94).

Na seção a seguir apresentamos algumas técnicas de aproximações para soluções de um problema de valor inicial (PVI).

## 4.2 Método da Série de Taylor

A ideia é tentarmos encontrar uma função  $y(x)$  que satisfaça o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (4.95)$$

Assumindo que  $y$  e  $f$  são diferenciáveis, então diferenciando (pela regra da cadeia), a equação diferencial  $y'(x) = f(x, y)$ , obtemos

$$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'(x) = f_x + f_y f$$

Diferenciando novamente, temos

$$\begin{aligned} y'''(x) &= f_{xx} + f_{xy}y' + f_{yx}f + f_{yy}fy' + f_y f_x + f_y f_y y' \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f \end{aligned} \quad (4.96)$$

Agora, voltemos à expansão em série de Taylor dada por (4.81), para calcular  $y_{i+1}$  a partir de  $x_i$ . Lembrando que  $y_{i+1} \approx y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$ , tem-se

$$y_{i+1} \approx y_i + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \mathcal{O}(h^4).$$

onde,  $\mathcal{O}(h^4)$  representa a expressão do erro de ordem  $h^4$ . Assim, usando as derivadas calculadas em (4.96) obtemos uma aproximação com erro de quarta ordem:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &\approx y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)] + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} [f_{xx}(x_i, y_i) + 2f_{xy}(x_i, y_i)f(x_i, y_i) + f_{yy}(x_i, y_i)f^2(x_i, y_i) + \\ &\quad f_y(x_i, y_i)f_x(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)f(x_i, y_i)] + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Assim, obtemos um método de solução para o problema (4.95) que consiste em usar os valores  $(x_i, y_i)$  em (4.97) para calcular  $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$ .

Na próxima seção apresentamos os métodos de Runge-Kutta, cuja ideia básica é aproveitar a eficiência/precisão dos métodos de série de Taylor e ao mesmo tempo eliminar sua maior dificuldade que é o cálculo de derivadas de  $f(x, y)$  que torna os métodos de série de Taylor inviáveis, devido ao alto custo computacional.

### 4.3 Métodos de Runge-Kutta

Em virtude da simplicidade e alta precisão, os métodos de Runge-Kutta são usados com maior frequência para solução de problemas de valor inicial. Considere o problema de valor inicial dado por (4.95), tomando a malha definida pelo passo  $h$ , podemos usar a fórmula de diferenças finitas avançada para discretizar a derivada de  $y(x)$  no ponto  $x_k$ . Dessa forma, obtemos a seguinte forma discretizada para (4.95):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k). \quad (4.98)$$

Esta equação define o método de Euler (Runge-Kutta de 1ª ordem). Ele funciona da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Lembrando que a fórmula avançada tem erro de ordem  $h$ . Portanto, o método de Euler tem erro de truncamento  $\mathcal{O}(h)$  em cada passo. Esse método pode ser modificado de forma a se obter maior precisão. Por exemplo, consideremos inicialmente os métodos de Runge-Kutta de segunda ordem, ou seja, métodos com erro de truncamento local de ordem  $\mathcal{O}(h^2)$  (método de Taylor com erro de ordem  $h^2$ ), definidos por

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = a_1 f(x_k, y_k) + a_2 f(x_k + b_1 h, y_k + b_2 h)$$

onde os parâmetros  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  serão calculados de maneira conveniente de forma que a precisão do resultado seja aumentada. Da igualdade acima, obtemos

$$y_{k+1} = y_k + a_1 h f(x_k, y_k) + a_2 h f(x_k + b_1 h, y_k + b_2 h). \quad (4.99)$$

Note que o último termo do lado direito desta expressão pode ser desenvolvido por séries de Taylor para funções de duas variáveis. Assim,

$$\begin{aligned} f(x_k + b_1 h, y_k + b_2 h) &= f(x_k, y_k) + hb_1 f_x(x_k, y_k) + hb_2 f_y(x_k, y_k) + \\ &+ \frac{1}{2} [h^2 b_1^2 f_{xx}(x_k, y_k) + 2h^2 b_1 b_2 f_{xy}(x_k, y_k) + h^2 b_2^2 f_{yy}(x_k, y_k)] + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad \text{Substituindo esta ex-}$$

pressão na equação (4.99) e agrupando os termos com potências iguais para  $h$ , tem-se

$$y_{k+1} = y_k + h[(a_1 + a_2)f(x_k, y_k)] + \frac{h^2}{2}[2a_2b_1f_x(x_k, y_k) + 2a_2b_2f_y(x_k, y_k)] + \frac{h^3}{6}[3a_2b_1^2f_{xx}(x_k, y_k) + 6a_2b_1b_2f_{xy}(x_k, y_k) + 3a_2b_2^2f_{yy}(x_k, y_k)] + \mathcal{O}(h^4). \quad (4.100)$$

Nos métodos de Runge-Kutta, os parâmetros  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  são escolhidos conforme a ordem (precisão) da aproximação de  $y_{k+1}$  obtidos por (4.97) e (4.100). A título de ilustração, consideremos o método de Runge-Kutta de segunda ordem. Devemos escolher  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  de modo que os multiplicadores de  $h$  e  $h^2$  em (4.97) e (4.100) sejam iguais. Dessa forma, temos que os parâmetros devem ser tais que:

$$a_1 + a_2 = 1, \quad 2a_2b_1 = 1 \text{ e } 2a_2b_2 = f(x_k, y_k).$$

Note que temos quatro parâmetros que devem satisfazer três condições. Portanto, existem várias maneiras para escolher  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$ , de modo que o cálculo de  $y_{k+1}$  usando (4.99) coincida com a série de Taylor dada por (4.97) até o termo de segunda ordem. Por exemplo, uma escolha conveniente seria

$$a_1 = a_2 = 1/2, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = f(x_k, y_k)$$

ou

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = 1/2, \quad b_2 = \frac{1}{2}f(x_k, y_k)$$

Parâmetros estes que definem métodos de Runge-Kutta de segunda ordem. E funcionam da seguinte forma:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_{k+1} = y_k + h[a_1f(x_k, y_k) + a_2f(x_k + b_1h, y_k + b_2hf(x_k, y_k))], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Analogamente obtém-se métodos de Runge-Kutta de ordem superior. Como por exemplo,

- Runge-Kutta de 3ª ordem, dado por:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y_{k+1} = y_k + \frac{2c_1}{9} + \frac{c_2}{3} + \frac{4c_3}{9}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

onde:

$$c_1 = hf(x_k, y_k),$$



$$c_2 = hf(x_k + h/2, y_k + c_1/2),$$

$$c_3 = hf(x_k + (3/4)h, y_k + (3/4)c_2).$$

- Runge-Kutta de 4ª ordem, dado por:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_{k+1} = y_k + (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4)/6, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

onde:

$$c_1 = hf(x_k, y_k),$$

$$c_2 = hf(x_k + h/2, y_k + c_1/2),$$

$$c_3 = hf(x_k + h/2, y_k + c_2/2),$$

$$c_4 = hf(x_k + h, y_k + c_3).$$

Em geral, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem é o mais utilizado por ser relativamente simples, ter alta precisão e baixo custo computacional.

**Exemplo 3.** Dado o PVI a seguir, estimar  $y(\pi)$  pelo método de Runge-Kutta de segunda ordem.

$$\begin{cases} y' = -y + \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.101)$$

Temos que o método de Runge-Kutta de segunda ordem assume a seguinte forma:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Para o PVI dado, temos que:  $h = \pi/n$ ,  $x_k = kh$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  e  $f(x, y) = -y + \cos x$ . Portanto,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [\cos(x_k) - y_k + \cos(x_k + h) - y_k - h \cos(x_k) + hy_k]$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [(1 - h) \cos(x_k) + \cos(x_k + h) + (h - 2)y_k]$$

$$y_{k+1} = \left[ \frac{h}{2} (h - 2) + 1 \right] y_k + \frac{h}{2} [(1 - h) \cos(x_k) + \cos(x_k + h)]$$

$$y_{k+1} = \left[ \frac{h^2}{2} - h + 1 \right] y_k + \frac{h}{2} [(1 - h) \cos(kh) + \cos(h(k + 1))]$$

Na tabela 4.2 apresentamos os resultados para  $n = 20$ , ou seja,  $h = \pi/20$ .

Tabela 4.2: Runge-Kutta de 2ª ordem para o PVI (4.101) com  $h = \pi/20$ .

k	$x_k$	$y_k$	k	$x_k$	$y_k$
1	$\pi/20$	0.14377	11	$11\pi/20$	0.32312
2	$2\pi/20$	0.26304	12	$12\pi/20$	0.24172
3	$3\pi/20$	0.35791	13	$13\pi/20$	0.15062
4	$4\pi/20$	0.42863	14	$14\pi/20$	0.05260
5	$5\pi/20$	0.47569	15	$15\pi/20$	-0.04946
6	$6\pi/20$	0.49981	16	$16\pi/20$	-0.15265
7	$7\pi/20$	0.50204	17	$17\pi/20$	-0.25409
8	$8\pi/20$	0.48369	18	$18\pi/20$	-0.35100
9	$9\pi/20$	0.44643	19	$19\pi/20$	-0.44073
10	$10\pi/20$	0.39217	20	$\pi$	-0.52086

A solução analítica do PVI (4.101) é dada por

$$y(x) = \frac{1}{2} (-e^{-x} + \sin x + \cos x),$$

portanto,  $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}(-1 - e^{\pi}) \approx -0.52160$ . De onde segue que a diferença (erro de truncamento local) entre o valor obtido pela solução analítica e a aproximação de Runge-Kutta de 2ª ordem, considerando 5 casas decimais, é  $|y(\pi) - y_{20}| = |-0.52160 + 0.52086| = 0,00074 = 7,4 \times 10^{-4}$ . Assim, tomando  $h = \pi/20$  no método de Runge-Kutta de 2ª ordem e, considerando cinco casas decimais, obtemos uma aproximação para  $y(\pi)$  com erro inferior a  $7,5 \times 10^{-4}$ .

Na figura 4.13 apresentamos os gráficos para simulações com  $h = \pi/20$ ,  $h = \pi/50$ , fixados e com valores de  $h$  determinados pela máquina através do comando ode23 e ode45 do ambiente Matlab®, bem como o gráfico da solução analítica do PVI (4.101).

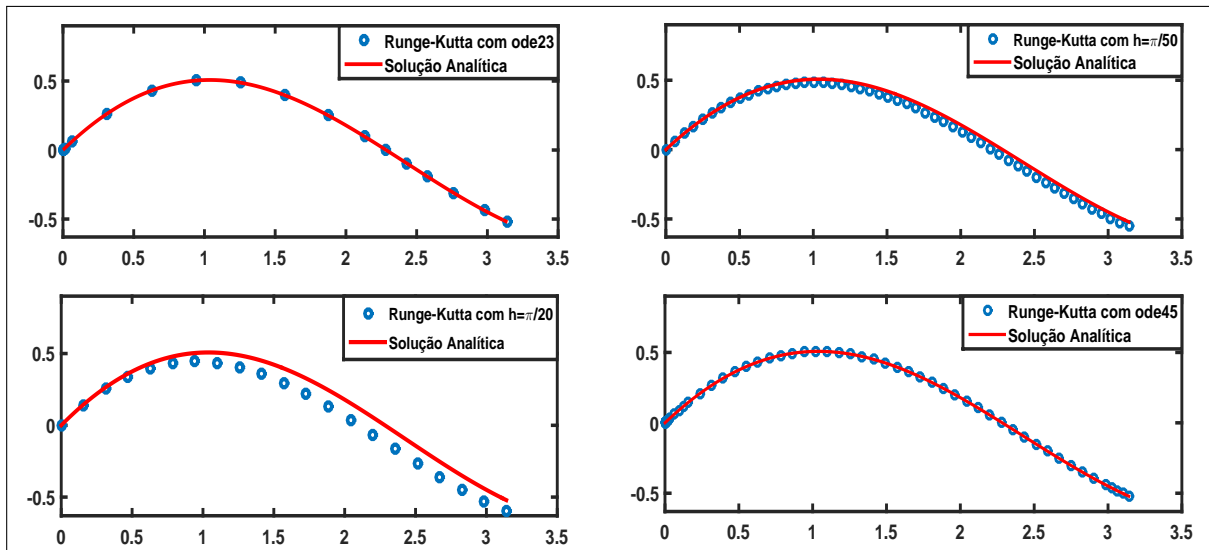


Figura 4.13: Gráficos das aproximações para solução do PVI (4.101) com diferentes valores de  $h$ , juntamente com o gráfico da solução analítica.

Na próxima seção nos dedicaremos ao estudo de técnicas de aproximações numéricas para soluções de equações diferenciais parciais.

## 4.4 Soluções Numéricas de Equações Diferenciais Parciais

Muitos fenômenos físicos podem ser descritos matematicamente através de *Equações Diferenciais Parciais* (EDP's), ou sistemas de EDP's, pois as entidades físicas estudadas são geralmente funções de mais de uma variável. Por exemplo, a temperatura de uma placa metálica pode variar em cada ponto, no interior, e depender do tempo, que no caso bidimensional, teríamos como incógnita uma função  $u(x, y, t)$ . As taxas de variação dessas entidades físicas são dadas por suas derivadas parciais. Portanto, é comum, ao modelarmos matematicamente um fenômeno, recair em um conjunto de EDP's.

Uma EDP linear de segunda ordem no plano pode ser escrita como

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g,$$

onde  $a, b, c, d, e, f$  e  $g$  são constantes ou funções das variáveis independentes  $x$  e  $y$ .

As funções  $a, b$  e  $c$  são tais que  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ . Se  $a, b, c$  forem constantes podemos classificar a equação como:

1. Elíptica se  $b^2 - ac < 0$ .
2. Parabólica se  $b^2 - ac = 0$ .
3. Hiperbólica se  $b^2 - ac > 0$ .

Caso os coeficientes variem com  $(x, y)$ , tal verificação é feita ponto a ponto.

Em geral, obter a solução analítica de uma equação diferencial parcial pode se tornar uma tarefa bastante difícil e, em muitos casos, impossível. Neste contexto, se faz necessário encontrar formas alternativas para resolução de tal equação, como por exemplo os métodos numéricos. Nas seções a seguir discutimos alguns métodos de aproximação para solução de uma equação diferencial parcial.

#### 4.4.1 O Método de Diferenças Finitas

Nesta seção nos dedicamos ao estudo do método de diferenças finitas para aproximação da solução de uma equação diferencial parcial. As ideias aqui discutidas seguem o mesmo raciocínio abordado quando trabalhamos com equações diferenciais ordinárias.

##### 4.4.1.1 Definição da Malha

Seja  $\mathcal{R}$  o conjunto dos pontos  $(x, y)$  onde a equação diferencial está definida e  $\mathcal{S}$  o contorno desse conjunto. Vamos tomar uma malha de pontos com o mesmo espaçamento descrita por:

$$\mathcal{R}_h = \{(x_i, y_j) = (\bar{x} + ih, \bar{y} + jh), i, j = \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

onde  $(\bar{x}, \bar{y})$  é um ponto de referência (condição inicial) arbitrário fixo do plano, e  $h$  é uma constante positiva denominada passo da malha.

Porém, é possível que a malha  $\mathcal{R}_h$  não contenha os elementos de  $\mathcal{S}$ . E portanto, torna-se necessário definir o contorno de  $\mathcal{R}_h$ . Uma ideia seria anexar ou desprezar pedaços de  $\mathcal{R}$  para obter uma aproximação de  $\mathcal{R}$  por meio de  $\mathcal{R}_h$ . Ou ainda, tomar uma malha com tamanho variável de forma a incorporar as condições de contornos nas intersecções das retas paralelas aos eixos coordenados passando por  $\bar{x} + ih$  e  $\bar{y} + jh$  com a fronteira  $\mathcal{S}$ .

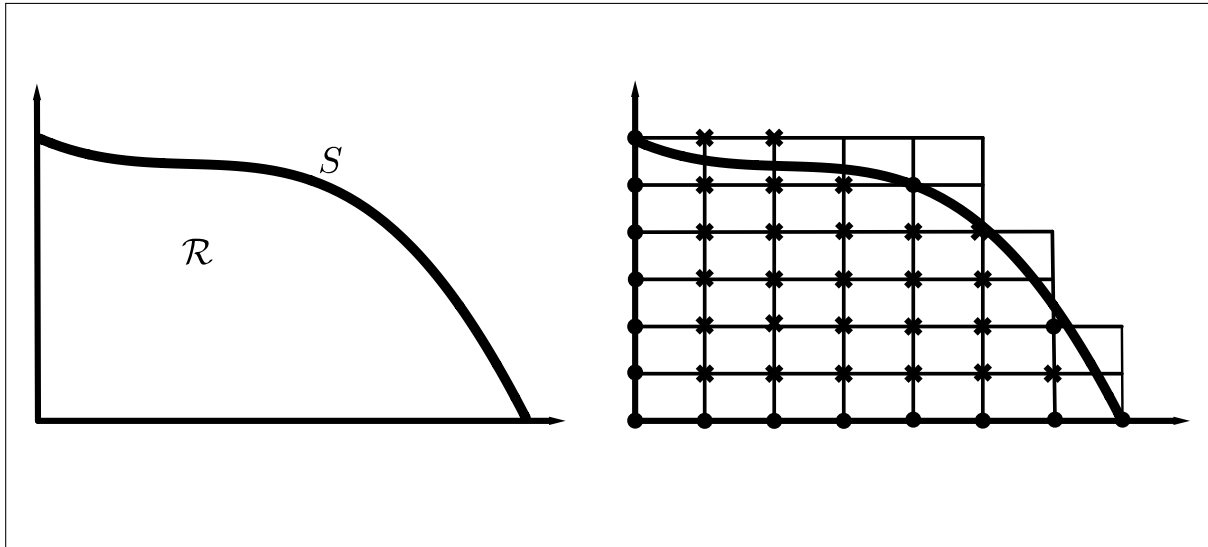


Figura 4.14: Discretização da região  $\mathcal{R}$ . Fonte: adaptado de Cunha (2000).

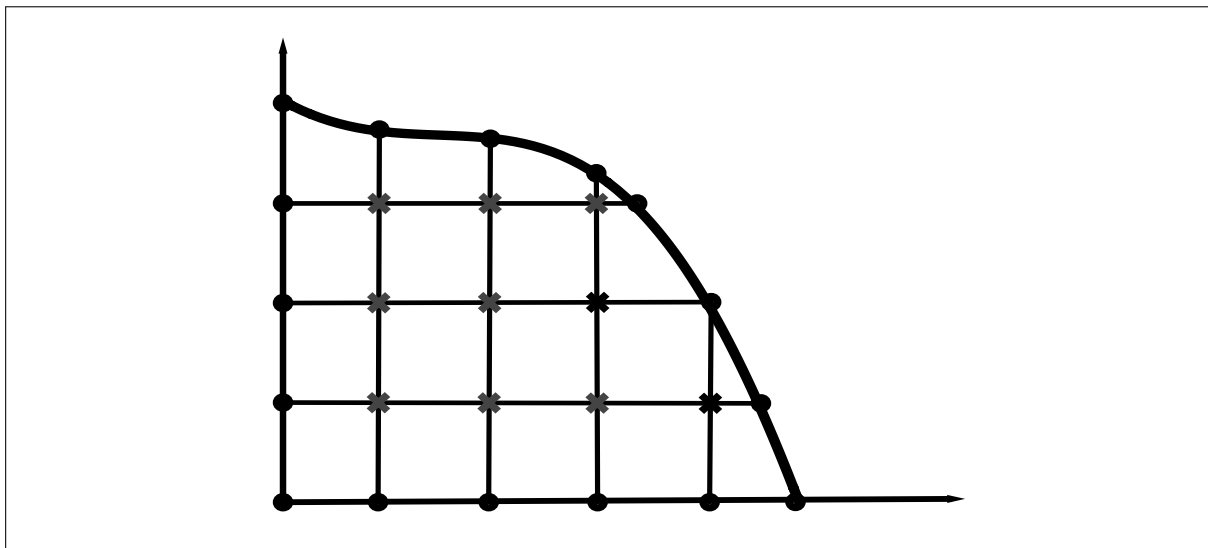


Figura 4.15: Discretização variável da região  $\mathcal{R}$ . Fonte: adaptado de Cunha (2000).

#### 4.4.1.2 Discretização do Operador Laplaciano

No caso de equações diferenciais parciais de duas variáveis o operador laplaciano é definido como:

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}. \quad (4.102)$$

O método de diferenças finitas para resolução de equações diferenciais ordinárias pode ser utilizado para aproximar derivadas parciais. Para isso, podemos fazer a expansão em séries de Taylor na variável  $x$  e obter

$$u(x + h, y) = u(x, y) + u_x(x, y)h + u_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2} + u_{xxx}(x, y)\frac{h^3}{3!}, \quad (4.103)$$

$$u(x - h, y) = u(x, y) - u_x(x, y)h + u_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2} - u_{xxx}(\beta, y)\frac{h^3}{3!}, \quad (4.104)$$

com  $\alpha \in [x, x + h]$  e  $\beta \in [x - h, x]$ . Note que, de (4.103) e (4.104) obtemos

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} - \frac{u_{xx}(\alpha_1, y)h^2}{2h}$$

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x, y) - u(x - h, y)}{h} + \frac{u_{xx}(\beta_1, y)h^2}{2h}$$

respectivamente, ou seja,

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} \quad \text{com erro } \mathcal{O}(h). \quad (4.105)$$

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x, y) - u(x - h, y)}{h} \quad \text{com erro } \mathcal{O}(h). \quad (4.106)$$

As equações (4.105) e (4.106) são chamadas de diferenças finitas avançada e atrasada respectivamente. Se considerarmos mais um termo na expansão de Taylor podemos encontrar a fórmula para a diferença centrada. Considerando todos os termos em (4.103) e (4.104) obtemos

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} - \frac{u_{xx}(x, y)h}{2} - \frac{u_{xxx}(\alpha, y)h^2}{3!} \quad (4.107)$$

e

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x, y) - u(x - h, y)}{h} + \frac{u_{xx}(x, y)h}{2} - \frac{u_{xxx}(\beta, y)h^2}{3!} \quad (4.108)$$

respectivamente. Agora, somando (4.107) e (4.108) segue que

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x + h, y) - u(x - h, y)}{2h} - \frac{[u_{xxx}(\alpha, y) + u_{xxx}(\beta, y)]h^2}{3!}$$

e portanto, a fórmula para diferença centrada é dada por

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x + h, y) - u(x - h, y)}{2h} \quad \text{com erro } \mathcal{O}(h^2). \quad (4.109)$$

Para encontrar a fórmula da diferença centrada para a segunda derivada, considere a

expansão de Taylor, na variável  $x$ ,

$$u(x+h, y) = u(x, y) + u_x(x, y)h + u_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2} + u_{xxx}(x, y)\frac{h^3}{3!} + u_{xxxx}(\alpha, y)\frac{h^4}{4!} \quad (4.110)$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - u_x(x, y)h + u_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2} - u_{xxx}(x, y)\frac{h^3}{3!} + u_{xxxx}(\beta, y)\frac{h^4}{4!} \quad (4.111)$$

de (4.110) e (4.111) obtemos,

$$u_{xx}(x, y) = 2 \left[ \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h^2} - \frac{u_x(x, y)}{h} - \frac{u_{xxx}(x, y)h}{3!} - \frac{u_{xxxx}(\alpha, y)h^2}{4!} \right] \quad (4.112)$$

e

$$u_{xx}(x, y) = 2 \left[ \frac{u(x-h, y) - u(x, y)}{h^2} + \frac{u_x(x, y)}{h} + \frac{u_{xxx}(x, y)h}{3!} - \frac{u_{xxxx}(\beta, y)h^2}{4!} \right]. \quad (4.113)$$

Somando (4.112) e (4.113) segue que

$$u_{xx}(x, y) = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} - \frac{[u_{xxxx}(\alpha, y) + u_{xxxx}(\beta, y)]h^2}{4!}.$$

E portanto, a fórmula da diferença centrada para segunda derivada é dada por

$$u_{xx}(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} \quad \text{com erro } \mathcal{O}(h^2). \quad (4.114)$$

Procedendo de maneira análoga obtemos a discretização para as derivadas parciais com relação a  $y$ ,

$$u_y(x, y) \approx \frac{u(x, y+h) - u(x, y-h)}{2h} \quad \text{com erro } \mathcal{O}(h^2). \quad (4.115)$$

$$u_{yy}(x, y) = \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2} \quad \text{com erro } \mathcal{O}(h^2). \quad (4.116)$$

Para deixar a notação menos carregada, usaremos as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} u(x_i, y_j) &\approx u_{i,j}, & u(x_i - h, y_j) &\approx u_{i-1,j}, & u(x_i, y_j - h) &\approx u_{i,j-1}. \\ u(x_i + h, y_j) &\approx u_{i+1,j}, & u(x_i, y_j + h) &\approx u_{i,j+1}, \end{aligned}$$

Assim,

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (4.117)$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \quad (4.118)$$

logo,

$$\nabla^2 u|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \quad \text{com erro } \mathcal{O}(h^2)$$

equivalentemente,

$$\nabla^2 u|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{1}{h^2} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}]. \quad (4.119)$$

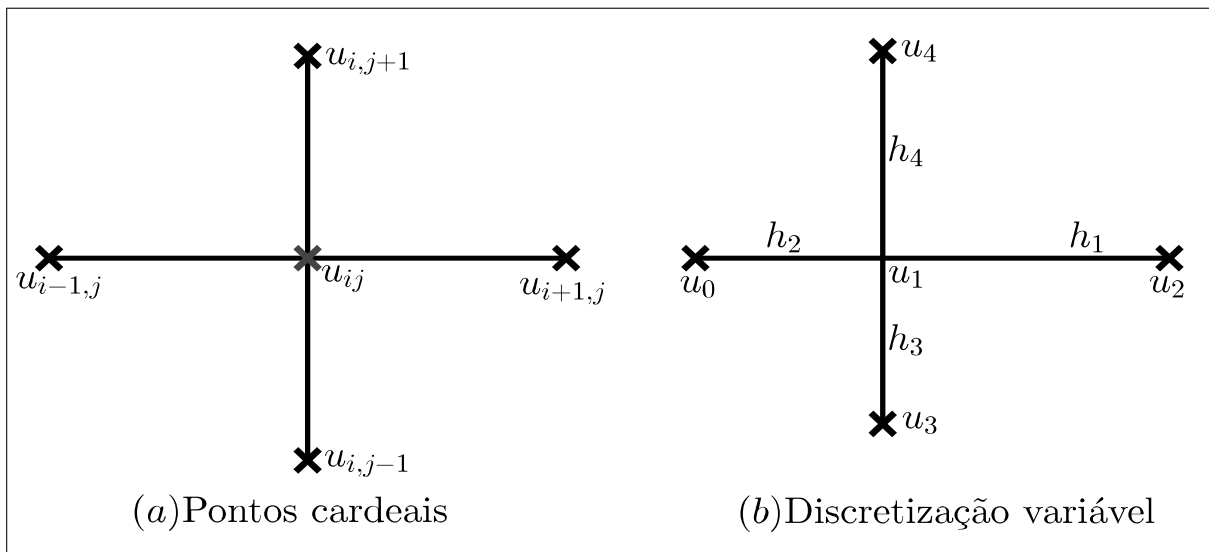


Figura 4.16: Fonte: adaptado de Cunha (2000)

**Observação 4.5.** Note que em (4.119) se tivermos  $\Delta u(x_i, y_j) = 0$  então  $u_{i,j}$  é a média dos seus quatro pontos vizinhos. Pois se  $(x, y)$  é solução de  $\Delta u = 0$ , então  $u(x, y)$  é a média de seus vizinhos para qualquer  $(x, y)$  pertencente ao domínio de  $u(x, y)$ .

Uma outra forma de discretização, seria tomar uma malha com pontos igualmente espaçados em cada direção, ou seja,  $\Delta x = h_1$  e  $\Delta y = h_2$ . Assim, as aproximações para as segundas derivadas ficam com a seguinte forma:



$$\Delta u|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + \mathcal{O}(h_1^2 + h_2^2). \quad (4.120)$$

Essencialmente, uma opção mais geral de discretização consiste em tomarmos uma malha irregular. Para isso, devemos tomar pontos  $(x_i, y_j)$  tais que  $x_{i+1} - x_i = h_i$  e  $y_{j+1} - y_j = h_j$ . Note que, para obtermos a fórmula para a aproximação da segunda derivada devemos fazer a expansão de Taylor nas duas direções, ou seja,  $u(x + h_1, y)$  e  $u(x - h_2, y)$ . Assim, pela expansão de Taylor, obtemos a discretização para o Laplaciano

$$\Delta u \approx 2 \left[ \frac{u_0}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{u_2}{h_1(h_1 + h_2)} + \frac{u_3}{h_4(h_3 + h_4)} + \frac{u_4}{h_3(h_3 + h_4)} - \left( \frac{1}{h_1 h_2} + \frac{1}{h_3 h_4} \right) u_1 \right]. \quad (4.121)$$

A vantagem de uma discretização desse tipo é que nos pontos próximos à fronteira ela ajusta melhor a malha ao domínio. Porém, note que, além de ser mais complicada (4.121) tem erro ordem  $h = \min\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ , enquanto (4.119) tem erro de ordem  $h^2$ . Note ainda que, se  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$  (4.121) e (4.120) recaem em (4.119), como esperado. A discretização do Laplaciano constitui uma técnica de resolução de EDP de segunda ordem.

Outra forma de resolvermos numericamente uma EDP, diz respeito ao método das linhas, nosso objeto de estudo na subseção a seguir.

#### 4.4.2 Critério das Linhas

A ideia desse método consiste em discretizar a variável espacial e manter a variável tempo contínua de forma que uma equação diferencial parcial possa ser aproximada por um sistema de equações diferenciais ordinárias e, portanto, a solução numérica do sistema de EDO's obtido será uma aproximação para solução da EDP dada. A título de ilustração

consideremos o seguinte problema de condução do calor para  $0 \leq x \leq 2$  e  $t \geq 0$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = -3 \sin(2\pi x) \end{cases} \quad (4.122)$$

cuja solução analítica é dada por

$$u(x, t) = -3e^{-\pi^2 t} \sin(2\pi x)$$

Vamos resolver numericamente o problema (4.122) pelo critério das linhas e comparar graficamente a aproximação numérica com a solução analítica.

Para discretizar a variável espacial, definimos a malha fazendo  $s_i = ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  com  $h = 2/n$  onde  $n$  é o número de subdivisões do intervalo  $[0, 2]$ . Usando a fórmula de diferença finita centrada dada por (4.93) e, considerando  $u_i(t) \approx u(s_i, t)$ , obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias.

$$\frac{du_i}{dt}(t) \approx \frac{1}{4} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (4.123)$$

Para solução numérica do sistema (4.123) usamos o método de Runge-Kutta de 2ª ordem implementado em ambiente MATLAB®.

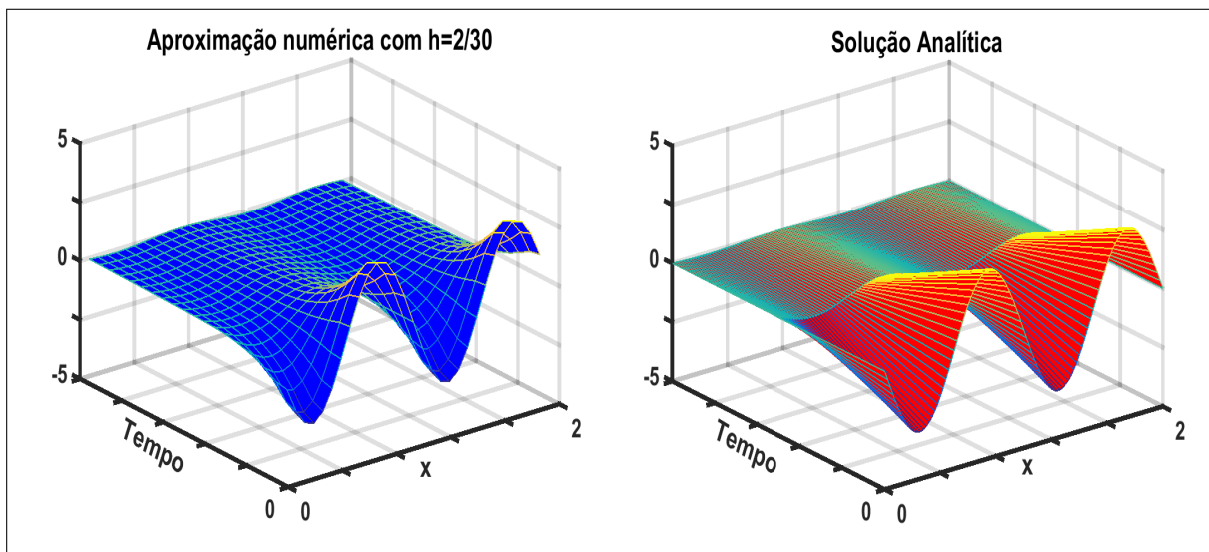


Figura 4.17: Gráficos das soluções numéricas e analítica do problema (4.122).

Para implementação, subdivimos o intervalo  $[0, 2]$  em 30 partes iguais, ou seja,  $n = 30$ , como usamos a rotina ode23 do MATLAB<sup>®</sup>, a subdivisão da variável temporal é escolhida automaticamente pelo algoritmo de forma a otimizar a aproximação.

Podemos analisar o erro no ponto  $(\frac{9}{5}, 1)$  considerando 5 casas decimais da seguinte forma  $|u(\frac{9}{5}, 1) - u(x_{27}, 1)| = |0,00014 - 0.00017| = 0,00003 = 3 \times 10^{-5}$ . Assim, considerando 5 casas decimais o critério das linhas fornece uma aproximação para a solução do problema (4.122) no ponto  $(\frac{9}{5}, 1)$  com erro menor do que  $3,1 \times 10^{-5}$ .

Uma questão que surge naturalmente, diz respeito à convergência dos métodos numéricos usados para aproximação da solução de uma equação diferencial dada. Este é o nosso objeto de estudo na seção a seguir.

## 4.5 Estabilidade e Convergência de Métodos Numéricos

A implementação de algoritmos em computadores muitas vezes apresentam erros consideravelmente maiores do que os “simples” erros cometidos na discretização. Em algumas situações os resultados da simulação tende a se afastar cada vez mais da solução analítica conforme o tamanho do passo da discretização diminui.

Portanto, a discretização pode não se aproximar do contínuo quando o passo tende a zero. Ou seja, é possível haver instabilidade no esquema numérico. Uma ferramenta importante no estudo da convergência de um método numérico é chamada de erro de truncamento local. Essencialmente, o erro de truncamento local em um determinado passo mede a diferença entre a solução exata da equação diferencial e a equação de diferença usada para aproximação.

### 4.5.1 Estabilidade, Consistência e Convergência de Métodos Numéricos para EDO's

Nesta seção apresentamos as definições de estabilidade, consistência e convergência de métodos numéricos que aproximam a solução de uma EDO, bem como um critério de convergência para tais métodos.

Considere o problema de valor inicial dado por:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \end{cases} \quad (4.124)$$

**Definição 4.8.** (*Método de passo um*) Um método de passo um para aproximar a solução de um PVI da forma (4.124), é um método que pode ser escrito na forma

$$y_{k+1} = y_k + h\psi(x_k, y_k, h) \quad (4.125)$$

onde a função de incremento  $\psi$  é determinada por  $f$  e é uma função somente de  $x_k$ ,  $y_k$  e  $h$ .

Essencialmente, os métodos de passo um (ou passo simples) são assim denominados pelo fato de que a aproximação para o ponto  $x_{k+1}$  envolve informações de apenas um dos pontos anteriores da malha,  $x_k$ .

**Definição 4.9.** (*Erro de Truncamento Local*) O método de diferenças

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{k+1} &= y_k + h\psi(x_k, y_k, h), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

tem um erro de truncamento local

$$\tau_{k+1}(h) = \frac{y(x_{k+1}) - (y_k + h\psi(x_k, y_k))}{h} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \psi(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

**Definição 4.10.** (*De Consistência*) Um método de equação de diferença de passo um com erro de truncamento local  $\tau_k(h)$  no  $k$ -ésimo passo é consistente com a equação diferencial que aproxima, se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n} |\tau_k(h)| = 0.$$

Note que essa definição é local, uma vez que, para cada valor de  $\tau_k(h)$ , supomos que a aproximação  $y_{k-1}$  e a solução exata  $y(x_{k-1})$  são iguais.

**Definição 4.11.** *(De Convergência) Um método de equação de diferença de passo  $h$  é dito convergente com relação à equação diferencial que aproxima se*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - y(x_k)| = 0,$$

onde  $y(x_k)$  denota o valor exato da solução da equação diferencial e  $y_k$  é a aproximação obtida a partir do método de diferença no  $k$ -ésimo passo.

A definição acima nos diz que um método é convergente quando a solução da equação de diferença se aproxima da solução da equação diferencial ao tomarmos  $h$  (tamanho do passo) suficientemente pequeno.

**Definição 4.12.** *(De Estabilidade) Um método de passo  $h$  é estável se para cada equação diferencial, da forma (4.124),  $f$  satisfizer uma condição de Lipschitz, houver uma constante positiva  $h_0$  e  $K$  tal que a diferença entre duas soluções numéricas diferentes  $y_k$  e  $\tilde{y}_k$  satisfazendo (4.125) seja tal que*

$$|y_k - \tilde{y}_k| \leq K|y_0 - \tilde{y}_0|$$

Para todo  $0 \leq h \leq h_0$ .

Um método é estável quando pequenas variações ou perturbações nas condições iniciais provocam pequenas mudanças nas aproximações subsequentes. Essencialmente, um método é estável quando os resultados dependem continuamente dos dados iniciais. A seguir apresentamos alguns resultados sobre estabilidade, convergência e erro de truncamento.

**Teorema 4.7.** *Suponha que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \end{cases}$$

seja aproximado por um método de diferença de passo  $h$  na forma

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha, \\ y_{k+1} &= y_k + h\psi(x_k, y_k, h). \end{aligned}$$

Suponha também que exista um número  $h_0 > 0$  e que  $\psi(x, y, h)$  seja contínua e satisfaça

uma condição de Lipschitz na variável  $y$  com constante de Lipschitz  $L$  no conjunto

$$D = \{(x, y, h) \mid a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 \leq h \leq h_0\}.$$

Então

(i) O método é estável;

(ii) O método de diferença é convergente se, e somente se, for consistente, o que é equivalente a

$$\psi(x, y, 0) = f(x, y), \quad \forall a \leq x \leq b;$$

(iii) Se existir uma função  $\tau$  e, para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ , o erro de truncamento local  $\tau_k(h)$  satisfizer  $|\tau_k(h)| \leq \tau(h)$  sempre que  $0 \leq h \leq h_0$ , então

$$|y(x_k) - y_k| \leq \frac{\tau(h)}{L} e^{L(x_k - a)}.$$

Para demonstração veja o capítulo 4 de (Gear, 1971). A parte (i) do teorema 4.7 diz respeito à estabilidade de um método numérico de passo um. A parte (ii) apresenta condições suficientes para que um método consistente seja convergente. A parte (iii) diz que quando o erro de truncamento local tem taxa de convergência  $\mathcal{O}(h^n)$ , o erro global terá a mesma taxa de convergência.

**Exemplo 4.** Mostre que o método de Runge-Kutta de 2ª ordem (Euler Aperfeiçoado) dado por:

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

satisfaz as condições do teorema 4.7.

Comparando a função  $\psi$  do teorema 4.7 com a função  $f$  do método, segue que

$$\psi(x, y, h) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))]$$

Se a função  $f$  for Lipschitziana em  $\overline{D} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty\}$  na variável  $y$  com constante de Lipschitz  $L$ . Como,

$$\psi(x, y, h) - \psi(x, \bar{y}, h) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))] - \frac{1}{2} [f(x, \bar{y}) + f(x + h, \bar{y} + hf(x, \bar{y}))]$$

da condição de Lipschitz de  $f$  resulta que:

$$\begin{aligned}
|\psi(x, y, h) - \psi(x, \bar{y}, h)| &\leq (L/2)|y - \bar{y}| + (L/2)|y + hf(x, y) - \bar{y} - hf(x, \bar{y})| \\
&\leq L|y - \bar{y}| + (L/2)|hf(x, y) - hf(x, \bar{y})| \\
&\leq L|y - \bar{y}| + (hL^2/2)|y - \bar{y}| \\
&\leq (L + hL^2/2)|y - \bar{y}|.
\end{aligned}$$

De onde segue que  $\psi$  é Lipschitziana em  $y$ , com constante  $L_1 = L + h_0 L^2/2$ , para qualquer  $h_0 > 0$  no conjunto  $D$ . Por outro lado, se  $f$  for contínua em  $\bar{D}$  segue que  $\psi$  é contínua em  $D$ . Portanto, pelo teorema 4.7, o método de Runge-Kutta de segunda ordem é estável. Agora, tomando  $h = 0$ , obtemos

$$\psi(x, y, 0) = \frac{1}{2}[f(x, y) + f(x + 0, y + 0f(x, y))] = f(x, y)$$

de onde segue o método é consistente e, portanto, pela parte (ii) do teorema 4.7, o método de Runge-Kutta de segunda ordem é convergente. Ainda mais, sabemos que esse método tem erro de truncamento local de ordem  $\mathcal{O}(h^2)$ , o que implica que a ordem de convergência deste método também é de ordem  $\mathcal{O}(h^2)$ .

### 4.5.2 Estabilidade de Esquemas Numéricos para EDP's

Nesta seção nos baseamos em Strikwerda (2004). Os resultados sobre convergência apresentados na seção anterior funcionam bem para aproximações de soluções de equações diferenciais ordinárias. Ao lidarmos com equações diferenciais parciais as dificuldades aumentam devido a maior complexidade das EDP's.

Por exemplo, decorre do teorema 4.7 que a consistência de um esquema numérico de passo um para aproximação da solução de uma EDO é condição necessária e suficiente para garantir a convergência de tal método. Por outro lado, para problemas que envolvem EDP's a consistência de um método não garante sua convergência. O conceito de estabilidade constitui uma propriedade importante na análise da convergência de um esquema numérico de passo simples para aproximação da solução de uma EDP.

Antes de apresentarmos o resultado principal (Teorema 4.8) desta seção, vamos apre-

sentar algumas definições. Considere uma equação diferencial parcial linear do tipo:

$$P(\partial_t, \partial_x)u(t, x) = f(t, x)$$

onde  $P$  é um operador diferencial linear.

**Definição 4.13.** (*PVI bem posto*) O problema de valor inicial para a equação diferencial parcial de primeira ordem  $Pu = 0$  é bem posto se para qualquer tempo  $T > 0$ , existir uma constante  $C_T$  tal que qualquer solução  $u(t, x)$  satisfaça

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x)|^2 dx \leq C_T \int_{-\infty}^{\infty} |u(0, x)|^2 dx$$

para  $0 \leq t \leq T$ .

**Definição 4.14.** (*De Consistência*) Dada uma equação diferencial parcial,  $Pu = f$  e um esquema de diferenças finitas,  $P_{k,h}v = f$ , dizemos que o esquema de diferenças finitas é consistente com a equação diferencial parcial se para qualquer função suave  $\phi(t, x)$ ,

$$(P\phi - P_{k,h}\phi) \rightarrow 0, \quad k, h \rightarrow 0,$$

a convergência sendo pontual em cada ponto  $(t, x)$ .

Para muitos esquemas existem restrições quanto à maneira como  $h$  e  $k$  devem ser escolhidos de modo que o esquema seja estável e, portanto, útil computacionalmente.

**Definição 4.15.** (*Região de Estabilidade*) Uma região de estabilidade é qualquer região não vazia limitada do primeiro quadrante de  $\mathbb{R}^2$  que tem a origem como um ponto de acumulação. Isto é, a região de estabilidade deve conter a sequência  $(k_\nu, h_\nu)$  que converge para a origem quando  $\nu$  tende para o infinito.

Por exemplo, uma região da forma  $\{(k, h) \mid 0 < k \leq ch \leq C\}$ , onde  $c$  e  $C$  são constantes positivas.

**Definição 4.16.** (*De Estabilidade*) Um esquema de diferenças finitas  $P_{k,h}v_m^n = 0$  para uma equação de primeira ordem é estável em uma região de estabilidade  $\Lambda$  se houver um inteiro  $J$  tal que para qualquer tempo positivo  $T$ , há uma constante  $C_T$  tal que

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 \leq hC_T \sum_{j=0}^J \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^j|^2$$



para  $0 \leq nk \leq T$ , com  $(k, h) \in \Lambda$ .

A desigualdade na definição anterior expressa a ideia de que a norma da solução em qualquer momento  $t$ , com  $0 < t < T$ , é limitada na quantidade de crescimento que pode ocorrer. Essencialmente, o crescimento é no máximo um múltiplo constante da soma das normas da solução nos primeiros  $J + 1$  passos.

**Definição 4.17.** *(De Convergência) Um esquema de diferença finita de passo um que aproxima a solução de uma equação diferencial parcial é convergente se para qualquer solução da equação diferencial parcial  $u(t, x)$ , e soluções para o esquema de diferenças finitas,  $v_m^n$  tais que  $v_m^0$  converge para  $u_0(x)$  quando  $mh$  converge para  $x$ , então  $v_m^n$  converge para  $u(t, x)$  como  $(nk, mh)$  converge para  $(t, x)$  como  $h, k$  converge para 0.*

Os conceitos de consistência e estabilidade são de fundamental importância para análise da convergência de um método numérico para EDP's. Conforme destaca o Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer, cuja prova pode ser encontrada no capítulo 10 de Strikwerda (2004).

**Teorema 4.8.** *(De Equivalência de Lax-Richtmyer) Um esquema consistente de diferenças finitas (de passo um) para uma equação diferencial parcial para a qual o problema de valor inicial é bem posto, é convergente se, e somente se, for estável.*

Note que a análise de consistência e estabilidade de um esquema numérico pode ser feita usando suas respectivas definições. Por outro lado, a análise da convergência a partir da definição é uma tarefa muito difícil. Portanto, o Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer torna-se uma ferramenta importante, pois estabelece uma caracterização mais simples de esquemas numéricos convergentes.

## 5 Uma Aplicação: O Problema de Chamado de Alarme

Neste capítulo apresentamos um problema biológico que pode ser investigado matematicamente por meio dos conceitos que englobam a teoria das equações diferenciais. Mais precisamente, nos dedicamos ao estudo do problema de *chamado de alarme*. Inicialmente, revisaremos o modelo de Assis e Malavazi (2015) que, escreveram uma dinâmica para o problema como um sistema de equações diferenciais ordinárias, em seguida, incluíremos uma distribuição espacial a este modelo, obtendo assim, uma dinâmica descrita por um sistema de equações diferenciais parciais.

### 5.1 O Problema Biológico

Em 1858, os trabalhos realizados de forma independente pelos naturalistas Alfred Russel Wallace e Charles Darwin foram publicados na revista da *Linneam Society*. Conforme Carmo et al. (2009), em tais trabalhos ambos naturalistas fazem referência à luta pela subsistência que ocorre na natureza, onde o indivíduo melhor adaptado sobrevive deixando mais descendentes do que o menos adaptado, conduzindo assim ao declínio da variedade ou espécie menos adaptada. “Devido à luta pela vida, formas que são mais bem-adaptadas à sobrevivência deixam uma progênie maior e automaticamente aumentam em frequência de uma geração para a outra” (Ridley, 2006). Ao se referir a este princípio Darwin se expressou da seguinte forma:

Considering the infinitely various methods which living beings follow to obtain food by struggling with other organisms, to escape danger at various times of life, to have their eggs or seeds disseminated. I cannot doubt that during millions of generations individuals of a species will be occasionally born with some slight variation, profitable to some part of their economy. Such individuals will have a better chance of surviving, and of propagating their new and slightly different structure; and the modification may be slowly increased by the accumulative action of natural selection to any profitable extent. The variety thus formed will either coexist with, or, more commonly, will exterminate its parent form (Darwin e Wallace, 1858).

Assim, fundamentada inicialmente por Darwin e Wallace com a publicação de seus trabalhos em 1858 (que, segundo Browne (2011), acabaria culminando na grande obra de Darwin *A Origem das Espécies*), a seleção natural é um processo que com o passar das gerações, possibilita às populações uma capacidade de mudança de comportamento.

A teoria de Darwin afirma ainda que, “a seleção natural é a força criativa da evolução, não apenas o algoz dos não-aptos, ainda mais, ela precisa criar os aptos e construir adaptações de forma a preservar, gerações após gerações, a parte favorável de um espectro casual de variações” (Gould, 1999).

Conforme Ridley (2006), além de produzir mudanças evolutivas, a seleção natural também pode fazer com que uma população se mantenha constante, ou seja, se o ambiente for constante e não surgirem formas superiores na população, a seleção natural manterá essa população como está.

Para Gould (1999), certo de que a evolução ocorrera, Darwin buscava uma teoria que permitisse explicar seu mecanismo. Após sucessivas investigações e algumas hipóteses, eis que um *insight* lhe surge ao ler, por diversão, “*Ensaio sobre Populações*” de Malthus. Conforme descrito em sua autobiografia:

In October 1838, that is, fifteen months after I had begun my systematic enquiry, I happened to read for amusement “Malthus on Population”, and being well prepared to appreciate the struggle for existence which everywhere goes on from long-continued observation of the habits of animals and plants, it at once struck me that under these circumstances favourable variations would tend to be preserved, and unfavourable ones to be destroyed. The result of this would be the formation of new species (Darwin, 1887).

Nesse sentido, Gould (1999) chama atenção ao fato de que se todas as criaturas produzissem mais descendentes do que aqueles capazes de sobreviver, então a seleção natural

teria dirigido a evolução sob o simples pressuposto de que os sobreviventes estão melhor adaptados às condições de vidas dominantes.

“Evolução é um processo que tem um direcionamento geral que depende do que ocorreu na história da linhagem e como esses acontecimentos interferem no que pode acontecer no futuro” (Boeger, 2009). Assim, evolução é uma característica intrínseca de sistemas biológicos, que se constitui com o aparecimento de *novidades evolutivas*, que são moduladas pela seleção natural (Boeger, 2009).

Conforme Pigliucci (2008), novidades evolutivas são novas características ou comportamentos, ou novas combinações de traços ou comportamentos previamente existentes, surgidos durante a evolução de uma linhagem, e que desempenham uma nova função dentro da ecologia dessa linhagem. Wagner e Lynch (2010) definem novidades evolutivas “como uma nova parte do corpo que não é homóloga a qualquer parte do corpo na linhagem ancestral nem homóloga em série a qualquer outra parte do corpo do mesmo organismo”.

Como por exemplo, podemos mencionar uma mancha pigmentada (em formato de um olho) sensível à luz frequentemente encontrada nas asas de borboletas, glândulas mamárias em mamíferos, penas das aves, listras das zebras. Outro exemplo de novidade evolutiva é o comportamento de chamado de alarme, objeto de estudo deste trabalho.

O comportamento de chamado de alarme é uma estratégia fundamental de anti-predação que evoluiu em uma ampla gama de espécies, fenômeno este que consiste na emissão de sinais particulares diante de um perigo (presença de predador) eminente, (Caro, 2005).

Por exemplo, mencionamos bate-papos repetitivos e bate-papos não repetitivos ouvidos durante encontros de esquilos terrestres da Califórnia com predadores de mamíferos, bem como os “chirt”<sup>3</sup> dados por Carriças fêmeas da Carolina para informar o macho do perigo imposto pela aproximação de um falcão de calda-vermelha (Caro, 2005).

Conforme Caro (2005), existe uma confirmação ampla de que certos pássaros e mamíferos modulam seus alarmes de acordo com a extensão do perigo e do tipo de ameaça representada por um predador. A maior parte da pesquisa tem sido realizada com esquilos norte-americanos, várias aves, e um punhado de primatas. Futuyma (2002) chama a atenção ao fato de que nenhuma espécie está imune à predação, de forma que todas

---

<sup>3</sup>sinais vocais, veja Morton e Shalter (1977)

tendem a precisarem escapar de alguns de seus predadores e parasitas em potencial pela evolução de mecanismos de defesa.

Para Boeger (2009), um predador deve dispor de recursos que lhe permita capturar e processar suas presas. Ao passo que se pelo menos alguns indivíduos da população de presas não apresentar características evasivas ou de proteção ao predador, ela pode rapidamente entrar em extinção. Com a aproximação de um predador a um grupo de presas, um ou mais indivíduos presas podem emitir chamadas que alertam o grupo sobre o risco (Taylor et al., 1990).

Conforme Lima (1998), diante da presença de predadores, a presa pode alterar seu comportamento para dificultar a captura, a detecção ou o encontro. Lima (1998) também chama a atenção ao fato de que devido à flexibilidade adaptativa no comportamento de presas em resposta a um risco mutável de predação (isto é, a tomada de decisão antipredadora), os predadores têm grandes impactos em sistemas ecológicos independentes da predação real.

Assim, é evidente que o processo evolutivo (seleção natural) provoca adaptações no nível do indivíduo. Contudo, há controvérsia sobre o papel da seleção natural no nível de grupos e populações (Okasha, 2001). Wilson (2006) destaca a influência dos níveis hierárquicos da organização biológica (genes, organismos, populações, espécies) como um ponto importante no processo de seleção natural.

Um dos percursos que modelam o problema de chamado de alarme foi Maynard Smith. Smith (1965) considera uma população composta por pares de irmãos e irmãs e modela uma dinâmica para uma população com  $n$  pássaros supondo que haja  $r$  pássaros alarmistas e  $n - r$  não-alarmistas. De forma que em qualquer encontro:

- (i)  $P_k$  é a probabilidade de que um membro do bando seja morto.
- (ii)  $P_k \times P_A$  é a probabilidade de que um alarmista seja morto.
- (iii)  $P_k(1 - P_A)$  é a probabilidade de que um não-alarmista seja morto.

Segundo Smith (1965), quanto maior o número de alarmistas na população, mais cedo os alarmistas estão propensos a ver o predador e dar o alarme, e assim, maior é a probabilidade de que a população consiga escapar, de forma que  $P_k$  é uma função decrescente de  $r$ . Então, Smith (1965) modela a probabilidade de predação como uma fração da população de alarmistas, da seguinte forma:

$$P_k = P(1 - ar/n); \quad 0 < a < 1 \quad (5.126)$$

onde  $P$  é um parâmetro que reflete a eficiência do predador e  $a$  é uma constante que representa a eficiência do alarme na redução da predação. Assume-se que um alarme é dado pelo primeiro indivíduo alarmista que ver o predador. Para Smith (1965), se um pássaro é morto a probabilidade de que um indivíduo alarmista tenha sido morto é  $b/n$  com  $1 < b < n$ , pois se  $b \leq 1$ , dar o sinal de alarme não aumenta o risco corrido pelo indivíduo. Se  $b = n$  a morte é um evento certo para o indivíduo alarmista, se qualquer ave for morta. Essencialmente,  $b$  representa o risco de dar o alarme, para o indivíduo alarmista. Assim, a probabilidade de que uma ave específica ( $n-1$ ) não-alarmista seja morta é dada por:

$$\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{b}{n}\right) = \frac{n-b}{n(n-1)}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} P_A &= \frac{b}{n} + \frac{(r-1)(n-b)}{n(n-1)} \\ P_A &= \frac{b(n-1) + (r-1)(n-b)}{n(n-1)} \\ P_A &= \frac{bn - b + rn - rb - n + b}{n(n-1)} \end{aligned}$$

somando e subtraindo  $n^2$  no numerador da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} P_A &= \frac{n^2 - n - n^2 + bn + rn - rb}{n(n-1)} \\ P_A &= \frac{n(n-1) - (n-r)(n-b)}{n(n-1)} \\ P_A &= \frac{n(n-1)}{n(n-1)} - \frac{(n-r)(n-b)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} P_A &= 1 - \frac{n-r}{n}C \\ 1 - P_A &= \frac{n-r}{n}C \end{aligned} \quad (5.127)$$

onde  $C = (n-b)/(n-1)$ .

Para interpretar os resultados, Smith (1965) define dois parâmetros  $A$  e  $D$  que representam, respectivamente, a vantagem para a população e as desvantagens para o indivíduo que emitir a nota de alarme.

O parâmetro  $A$  é definido como a probabilidade de que, em um único encontro, uma ave vai ser morta a partir de um rebanho totalmente não-alarmista, dividida pela probabilidade de que uma ave vai ser morta a partir de um rebanho inteiramente alarmista. Da equação (5.126) tem-se

$$A = \frac{1}{1 - a} \quad (5.128)$$

A constante  $D$  (a desvantagem para o indivíduo), é definida como a chance de um alarmista ser morto, em um rebanho constituído por 50 por cento alarmista e 50 por cento de indivíduos não-alarmistas, dividida pela chance de que um não-alarmista seja morto. Da equação (5.127), segue que

$$D = \frac{2 - C}{C} \quad (5.129)$$

Considerando o caso em que o alarmismo é devido a um gene recessivo,  $gg$  sendo alarmista e  $GG$ ,  $Gg$  não-alarmista. Se  $p$  é a frequência de  $g$ . Contando cada morte  $GG$  como a perda de dois genes  $G$ , e assim por diante, o que reduz a

$$a = \frac{2(2 - p)(1 - C)}{2 - C} \quad (5.130)$$

substituindo em (5.128) e (5.129) obtem-se

$$A = \frac{D}{2 - D + p(D - 1)} \quad (5.131)$$

onde  $p$  é a frequência do gene recessivo para o alarmismo. Após estas considerações, Smith (1965) resume os resultados da seguinte forma:

- (i) Uma vez que  $D > 1$ , para um dado valor de  $D$ ,  $A$  diminui à medida que  $p$  aumenta. Portanto, deve haver equilíbrio estável entre  $p = 0$  e  $p = 1$ .
- (ii) Quando  $p = 1$ , então  $A = D$ . Por isso, para manter um gene recessivo para o alarmismo, uma vez que é estabelecido como o alelo comum, é suficiente que  $A$  deve ser maior do que  $D$ .

(iii) Quando  $p = 0$ ,  $A = D/(2 - D)$ . Portanto, se  $D > 2$ , nenhuma vantagem seletiva para o bando será suficiente para causar um aumento de um gene recessivo para o alarmismo se inicialmente é raro. Se as vantagens seletivas são leves, de modo que  $A = 1 + \alpha$ ,  $D = 1 + \delta$ , aqui  $\alpha$  e  $\delta$  são pequenos, então,  $\alpha$  deve ser maior do que  $2\delta$  para o alarmismo aumentar.

Para Smith (1965), o caso quando alarmismo é devido a um gene dominante, mais uma vez partindo do princípio de que são bandos de irmãos, pode ser analisado da mesma maneira, e conduz à condição de equilíbrio:

$$a = \frac{2(3 - q)(1 - C)}{3(2 - C)} \quad (5.132)$$

substituindo em (5.128) e (5.129) obtém-se

$$A = \frac{3D}{3 + q(D - 1)} \quad (5.133)$$

onde  $q$  é a frequência do alelo dominante para o alarmismo. Após estas considerações, Smith (1965) conclui que, tal como, no caso do gene recessivo,  $A$  diminui conforme a frequência do alelo para alarmista aumenta, de forma que nenhuma frequência intermediária estável é possível.

(i) Quando o alarmismo é raro ( $q = 0$ ),  $A = D$ .

(ii) Quando o alarmismo é comum ( $q = 1$ ),  $A = \frac{3D}{2 + D}$ .

Assim, a vantagem seletiva para o rebanho necessário para estabelecer ou manter alarmismo é, para um dado valor de  $D$ , um pouco menor do que no caso de um alelo recessivo (Smith, 1965).

Baseados no modelo de Smith (1965), Assis e Malavazi (2015) apresentam uma dinâmica para o problema de chamado de alarme em uma população composta por indivíduos alarmistas e não-alarmistas. Nesse trabalho, estudam um processo de seleção natural com interação nos níveis do indivíduo e da população. Também sugerem a inclusão de uma distribuição espacial em sua dinâmica para “testar” as afirmações de *Trivers* de que a distribuição no espaço pode modificar as relações de seleção entre os indivíduos, ou seja, a seleção irá favorecer os indivíduos alarmistas mesmo em situações de vantagem para indivíduos não-alarmistas.

Assim, neste trabalho incluímos uma distribuição espacial à dinâmica descrita por Assis e Malavazi (2015), Considerando as mesmas hipóteses abordadas, para a construção



do nosso modelo. Conforme destacado por Assis e Malavazi (2015), não será levado em consideração a forma como o comportamento de alarme tenha evoluído ao longo do tempo, de forma que o modelo desempenhe apenas um papel conceitual buscando ilustrar as relações gerais entre esses dois níveis da organização biológica.

## 5.2 Modelagem: Modelo EDO, Modelo EDP

Nesta seção apresentamos modelos que descrevem a interação entre o nível individual e populacional. Consideramos populações de crescimento limitado caso a predação seja nula.

Agora, vamos apresentar algumas hipóteses biológicas sobre o comportamento de alarme.

### 5.2.1 O Comportamento de Alarme

Na natureza é bastante comum que diante da presença de um predador, as presas busquem mecanismos (anti-predatórios) de proteção. Assim, ao observar alguma situação de perigo, os animais que vivem em grupo tendem a emitir sinais, a fim de alertar os demais membros do grupo quanto a presença do predador.

Esses sinais podem ser visuais, auditivos ou químicos (Caro, 2005), e servem para solicitar ajuda no caso de um confronto, ou ainda alertar sobre a necessidade de uma fuga para proteger-se de um ataque.

Esse tipo de comunicação é denominado sinal de alarme que, segundo Sherman (1977), alerta outros animais (em geral, da mesma espécie) ao perigo iminente, e tem aparência de altruísmo. Assim, o comportamento de alarme em um grupo de indivíduos (presas) é, essencialmente, um sinal de alerta que indique a presença de risco aos indivíduos da população.

Conforme sugerido por Assis e Malavazi (2015), não será levado em consideração a forma específica do sinal, por ser irrelevante ao modelo apresentado. Serão consideradas as seguintes hipóteses:

1. O alarme é honesto, ou seja, a emissão de alerta por indivíduo indica realmente a presença de um predador.

2. O alarme é eficiente, isto é, o alarme reduz o sucesso de investida do predador sobre o grupo.
3. População composta totalmente por indivíduos alarmistas sobrevive à predação, ou seja, a taxa de reprodução é maior do que a taxa de predação.

A primeira hipótese se faz importante, pois segundo Møller (1988) um indivíduo pode dar um alarme falso com o intuito de beneficiar a si próprio, bem como a seus descendentes.

Assis e Malavazi (2015) chamam a atenção ao fato da segunda hipótese estar relacionada à sugestão de Charnov e Krebs (1975) de que o sinal de alarme provoque certa inquietação nos demais indivíduos de forma a diminuir o sucesso de ataque do predador ao alarmista, em contra partida, o sucesso de ataque aos indivíduos não-alarmistas aumentaria. Assim, consideramos apenas o alarme que reduz a eficiência do predador. Esta hipótese também remete à sugestão de Meuthen et al. (2012) de que os sinais de alerta podem não apenas desviar a atenção predador, bem como desencorajá-lo de atacar as presas.

A terceira hipótese é importante por permitir que o comportamento de alarme leve a população à sobrevivência, pois, caso contrário, teríamos uma situação em que a espécie seria levada à extinção (Assis e Malavazi, 2015).

### 5.2.2 Modelo EDO com Crescimento Logístico

Nesta seção nos dedicaremos ao estudo do modelo apresentado por Assis e Malavazi (2015). Definindo as variáveis do problema:  $t$  instante de tempo,  $x(t)$  número de indivíduos não-alarmistas no instante  $t$  e  $y(t)$  número de indivíduos alarmistas no instante  $t$ .

Supondo a presença de uma espécie de predadores de forma que permaneça em quantidade constante durante a dinâmica. Assis e Malavazi (2015) modelam a taxa de predação do indivíduo presa como uma função do número de indivíduos não-alarmistas.

$$T_p(x, y) = m + (M - m) \frac{x}{x + y} \quad (5.134)$$

onde  $m$  é a taxa mínima de predação (todos os indivíduos são alarmistas) e  $M$  é a taxa máxima de predação (ausência de alarmistas).

Supondo que a população tenha um crescimento populacional limitado na ausência de predadores, considerando uma capacidade de suporte  $k > 0$  para o crescimento da população  $(x + y)$ , admitindo crescimento logístico, Assis e Malavazi (2015) escrevem uma dinâmica para as populações da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(1 - x/k - y/k) - \gamma x T_p(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= ry(1 - x/k - y/k) - y T_p(x, y)\end{aligned}\tag{5.135}$$

onde  $r \geq 0$  é a taxa de reprodução da presa,  $\gamma$  é um parâmetro adimensional que determina o comportamento mais arriscado. Se  $\gamma > 1$  (vantagem alarmista) ficar em silêncio representa um maior risco, (Assis e Malavazi, 2015). Em geral, a movimentação das presas pode ser considerada um fator importante para atrair o predador. Assim, emitir o alarme pode ser mais benéfico do que não emitir o alarme, uma vez que ao emitir o alerta os demais indivíduos tenderiam a permanecer imóveis como é o caso de juvenis de muitas espécies (Hollén e Radford, 2009). Se  $\gamma < 1$  o comportamento de emitir alarme é mais arriscado, tendo em vista que o indivíduo alarmista atrai mais a atenção do predador, de forma que os não-alarmistas têm uma taxa de predação inferior à taxa de predação dos alarmistas (Assis e Malavazi, 2015).

Substituindo (5.134) em (5.135) obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(1 - x/k - y/k) - \gamma x \left( m + (M - m) \frac{x}{x + y} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= ry(1 - x/k - y/k) - y \left( m + (M - m) \frac{x}{x + y} \right)\end{aligned}\tag{5.136}$$

utilizando uma adimensionalização<sup>4</sup> adequada o sistema (5.136) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda x(1 - x - y) - \gamma x \left( 1 + (\theta - 1) \frac{x}{x + y} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda y(1 - x - y) - y \left( 1 + (\theta - 1) \frac{x}{x + y} \right)\end{aligned}\tag{5.137}$$

Para o modelo (5.137) foram feitas simulações, cujos resultados podem ser resumidos da seguinte forma:

1. Para  $\gamma < 1$  (vantagem não-alarmista) temos os seguintes casos:

---

<sup>4</sup>vide Assis e Malavazi (2015).

- (i) se  $\gamma\theta < \lambda$ , tem-se o estabelecimento da população não-alarmista e crescimento até a capacidade de suporte (vide figura 5.18).
- (ii) se  $\lambda < \gamma\theta$ , tem-se que as populações serão levadas à extinção (vide figura 5.19).
2. Para  $\gamma > 1$  (vantagem alarmista), tem-se o estabelecimento da população alarmista e crescimento até a capacidade de suporte (vide figura 5.20).

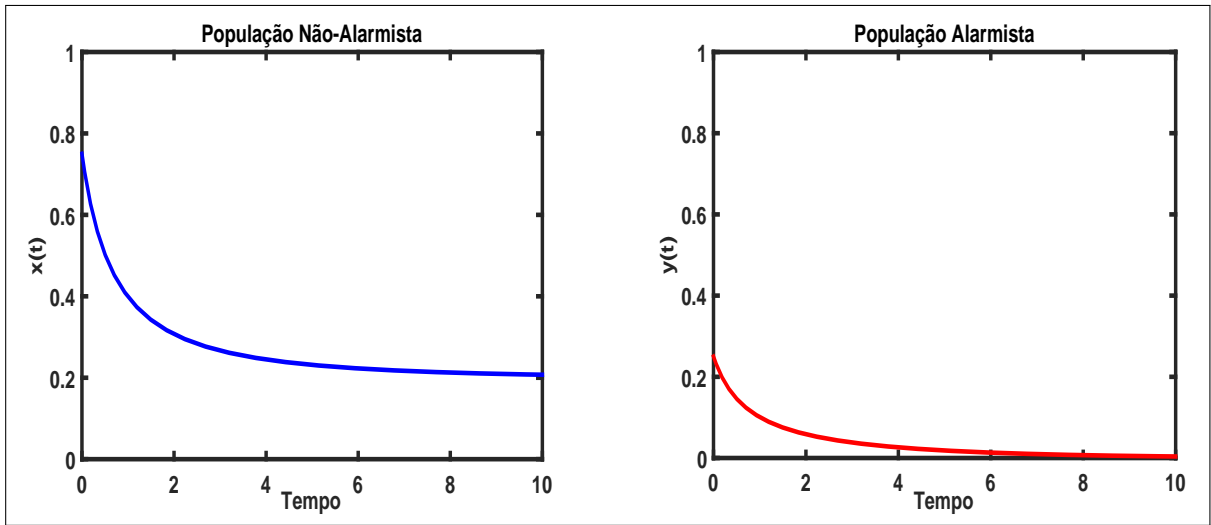


Figura 5.18: Gráficos das soluções para  $\gamma = 0,8$ ,  $\lambda = 1,5$  e  $\theta = 1,5$ .

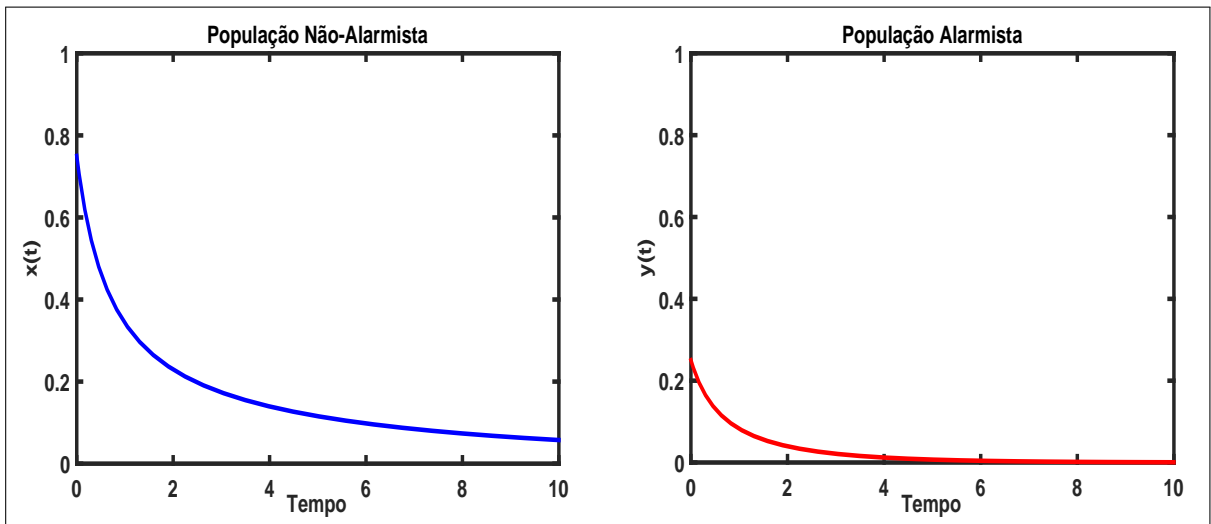


Figura 5.19: Gráficos das soluções para  $\gamma = 0,8$ ,  $\theta = 1,8$  e  $\lambda = 1,4$ .

Portanto, os resultados obtidos numericamente (métodos de Runge-Kutta) estão de acordo com os resultados analíticos encontrados por Assis e Malavazi (2015).

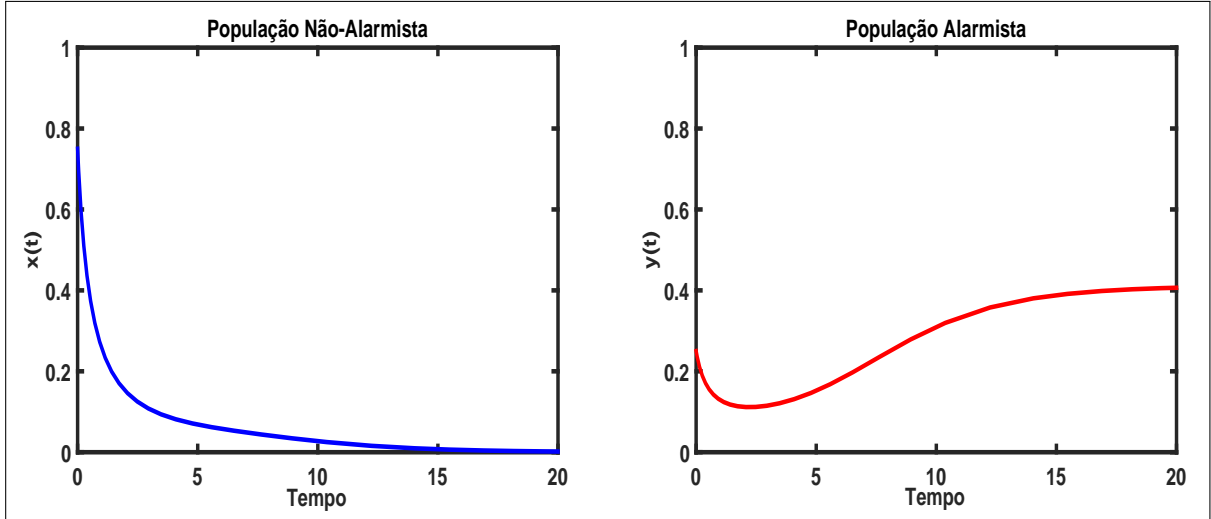


Figura 5.20: Gráficos das soluções para  $\gamma = 1, 3$ ,  $\lambda = 1, 7$  e  $\theta = 1, 5$ .

### 5.2.3 Modelo EDP: Distribuição Espacial com Crescimento Logístico

Em nosso modelo, baseados na distribuição espacial para o modelo presa-predador apresentado por Murray (2002) e no trabalho de Santana (2003), vamos considerar a distribuição espacial de uma população hipotética composta por indivíduos alarmistas e não-alarmistas. Abordaremos apenas o caso em que o espaço seja homogêneo e unidimensional, ou seja, uma distribuição espacial unidimensional.

Existem duas formas clássicas de considerarmos as condições de fronteiras para o problema: (i) fronteira letal (problema de *Dirichlet*), condição na qual os indivíduos são mortos ao se aproximarem da fronteira do espaço. (ii) fluxo nulo (problema de *Neumann*), na qual o fluxo na fronteira, é nulo. Como biologicamente a segunda é mais plausível, em nosso modelo consideramos apenas condições de contorno de *Neumann*.

Se presas e predadores estão distribuídos espacialmente, então poderá ocorrer variação espacial ao longo do tempo, com predadores movimentando-se afim de capturar sua presa, ao passo que a presa há de se movimentar com o intuito de fugir de seu predador (Murray, 2002). Assim, na distribuição espacial devemos considerar o tempo  $t$  e uma coordenada espacial, digamos  $s$ , teremos então, uma função de duas variáveis, a saber:

- $x(s, t)$  representará o número de indivíduos não-alarmistas no tempo  $t$  e na posição  $s$ ;
- $y(s, t)$  representará o número de indivíduos alarmistas no tempo  $t$  e na posição  $s$ .

com  $t \geq 0$  e  $0 \leq s \leq l$ .

A movimentação dos indivíduos é normalmente modelada pelo acréscimo de um coeficiente de difusão à dinâmica. É razoável pensar que os indivíduos tenham mobilidades distintas, o que nos permite supor que o coeficiente de difusão para indivíduos alarmistas pode ser diferente do coeficiente de difusão para indivíduos não-alarmistas. Dessa forma, o modelo (5.136) pode ser reformulado da seguinte forma,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= rx(1 - x/k - y/k) - \gamma x \left( m + (M - m) \frac{x}{x + y} \right) + d_1 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= ry(1 - x/k - y/k) - y \left( m + (M - m) \frac{x}{x + y} \right) + d_2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\end{aligned}\tag{5.138}$$

onde,  $d_1 \geq 0$  e  $d_2 \geq 0$  são parâmetros que representam a difusão (capacidade de locomoção) dos indivíduos não-alarmistas e alarmistas, respectivamente. Multiplicando as igualdades em (5.138) por  $1/(mk)$ , realizando uma adimensionalização  $s^* = s(d_2/m)^{1/2}$ ,  $t^* = tm$ ,  $x^* = x/k$ ,  $y^* = y/k$ , e, omitindo os asteriscos obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= \lambda x(1 - x - y) - \gamma x \left( 1 + (\theta - 1) \frac{x}{x + y} \right) + \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \lambda y(1 - x - y) - y \left( 1 + (\theta - 1) \frac{x}{x + y} \right) + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\end{aligned}\tag{5.139}$$

com  $\lambda = \frac{r}{m} > 1$  (decorrente da hipótese 3),  $\theta = \frac{M}{m} > 1$  (pois o alarme é eficiente),  $\alpha = \frac{d_1}{d_2}$ .

Buscamos soluções para o modelo (5.139) com condição de contorno de *Neumann* homogênea (fluxo nulo) e três cenários de condições iniciais.

No primeiro caso, as simulações foram feitas usando as condições iniciais (5.140a,b) (veja figura 5.21 (a)), de forma que a população inicial fosse composta por muitos indivíduos não-alarmistas e poucos indivíduos alarmistas.

No segundo caso, fizemos simulações com as condições iniciais (5.141a,b) (vide figura 5.21 (b)), de forma que a população inicial fosse composta por poucos indivíduos não-alarmistas e muitos indivíduos alarmistas.

No terceiro cenário as simulações foram feitas usando condições iniciais do tipo (5.142a,b) (figura 5.21 (c)), de maneira que os indivíduos não-alarmistas estivessem concentrados no centro do espaço e os indivíduos alarmistas estivessem concentrados em um dos extremos

do espaço.

$$x(s, 0) = f_1(s) = \frac{15}{(40l/5)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-l/2}{l/5}\right)^2} \quad (5.140a)$$

$$y(s, 0) = g_1(s) = \frac{5}{(40l/5)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-l/2}{l/5}\right)^2} \quad (5.140b)$$

onde  $f_1(s)$  é a condição inicial para indivíduos não-alarmistas, e  $g_1(s)$  é a condição inicial para indivíduos alarmistas.

$$x(s, 0) = f_2(s) = \frac{1}{(10l/5)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-l/2}{l/5}\right)^2} \quad (5.141a)$$

$$y(s, 0) = g_2(s) = \frac{2}{l\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-l/2}{l/5}\right)^2} \quad (5.141b)$$

onde  $f_2(s)$  é a condição inicial para indivíduos não-alarmistas, e  $g_2(s)$  é a condição inicial para indivíduos alarmistas.

$$x(s, 0) = f_3(s) = \frac{2}{l\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-4l/10}{l/5}\right)^2} \quad (5.142a)$$

$$y(s, 0) = g_3(s) = \frac{1}{(2l)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-7l/10}{l/5}\right)^2} \quad (5.142b)$$

onde  $f_3(s)$  é a condição inicial para indivíduos não-alarmistas (em maior quantidade) concentrados no centro do intervalo, e  $g_3(s)$  é a condição inicial para indivíduos alarmistas concentrados no extremo direito do intervalo.

Note (vide figura 5.21 ) que nas condições iniciais (5.140a,b) e (5.141a,b), a distribuição é normal centrada no meio do intervalo. No caso das condições iniciais (5.142a,b), a distribuição é normal centrada no meio e no extremo direito do intervalo.

Tomar condições iniciais desses tipos torna-se essencial para que possamos fazer uma análise sobre o efeito que a quantidade de indivíduos alarmistas pode exercer nos resultados da dinâmica para as populações. Ou seja, para investigar se uma população composta inicialmente por poucos (ou muitos) indivíduos alarmistas interfere qualitativamente nos resultados.

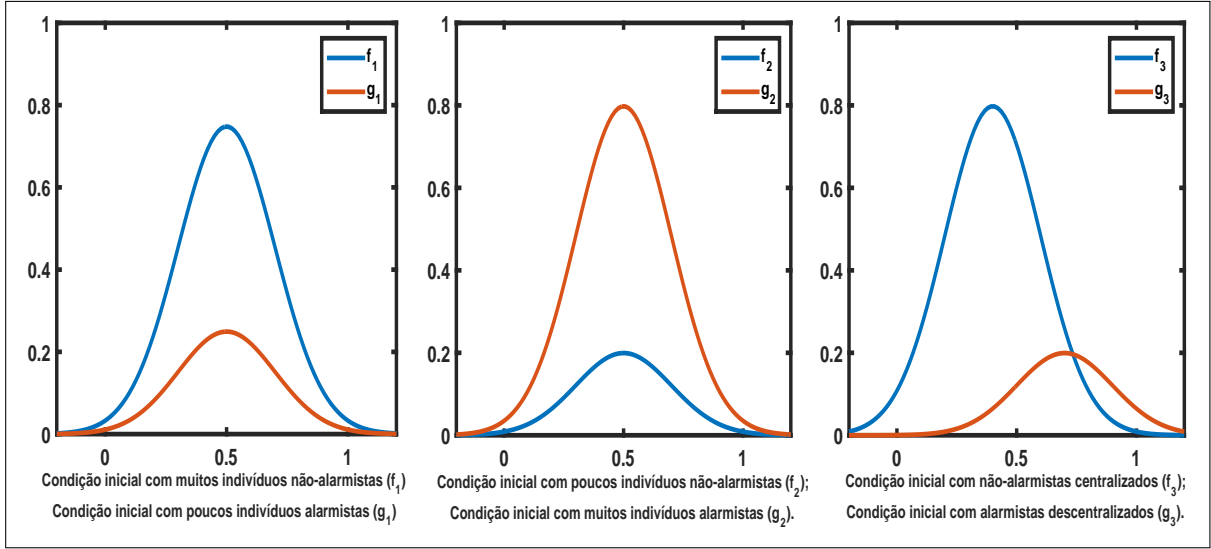


Figura 5.21: Gráficos das condições iniciais.

### 5.3 Simulações e Análise

Uma maneira de resolver uma Equação Diferencial Parcial (EDP) numericamente consiste em discretizar o espaço e manter a variável tempo contínua. Obtendo assim, um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), que pode ser resolvido por métodos clássicos da literatura.

Assim, baseados em Heath (1997), vamos fazer as simulações para o sistema (5.139) com condições iniciais (5.140a,b), (5.141a,b), bem como (5.142a,b) e condições de contorno de *Neumann*, pelo método das linhas usando  $\Delta s = h = l/n$ . Definindo os pontos da malha espacial  $s_i = ih$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , usando diferenças finitas centrada para discretização do espaço e considerando  $x_i(t) \approx x(t, s_i)$  e  $y_i(t) \approx y(t, s_i)$  obtemos o seguinte sistema de EDO's de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \lambda x_i(1 - x_i - y_i) - \gamma x_i \left( 1 + (\theta - 1) \frac{x_i}{x_i + y_i} \right) + \alpha \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} \\ \dot{y}_i(t) &= \lambda y_i(1 - x_i - y_i) - y_i \left( 1 + (\theta - 1) \frac{x_i}{x_i + y_i} \right) + \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (5.143)$$

**Observação 5.6.** Note que, ao aplicar as condições de *Neumann* em (5.143) obtemos três situações:

(a) se  $i = 1$  o sistema dado por (5.143) tem a seguinte forma



$$\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= \lambda x_i(1 - x_i - y_i) - \gamma x_i \left( 1 + (\theta - 1) \frac{x_i}{x_i + y_i} \right) + \alpha \frac{2x_{i+1} - 2x_i}{h^2} \\
\dot{y}_i(t) &= \lambda y_i(1 - x_i - y_i) - y_i \left( 1 + (\theta - 1) \frac{x_i}{x_i + y_i} \right) + \frac{2y_{i+1} - 2y_i}{h^2}
\end{aligned} \tag{5.144}$$

(b) se  $i = n - 1$  segue que

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= \lambda x_i(1 - x_i - y_i) - \gamma x_i \left( 1 + (\theta - 1) \frac{x_i}{x_i + y_i} \right) + \alpha \frac{2x_{i-1} - 2x_i}{h^2} \\
\dot{y}_i(t) &= \lambda y_i(1 - x_i - y_i) - y_i \left( 1 + (\theta - 1) \frac{x_i}{x_i + y_i} \right) + \frac{2y_{i-1} - 2y_i}{h^2}
\end{aligned} \tag{5.145}$$

(c) se  $i = 2, \dots, n - 2$  o sistema (5.143) não se altera.

Considerando a observação 5.6, simulações para o sistema (5.139) foram feitas pelo método de *Runge-Kutta* via MATLAB<sup>®</sup> com o comando **ode23**.

As simulações indicam que os resultados com condições iniciais para poucos indivíduos alarmistas e muitos indivíduos alarmistas, são qualitativamente idênticos. Além do mais, o fato dos indivíduos alarmistas estarem ou não, concentrados no mesmo local dos indivíduos não-alarmistas, não afeta os resultados. Essencialmente, a distribuição espacial (unidimensional) indica que a localização, bem como a quantidade de indivíduos alarmistas não interferem na dinâmica da população.

Em linhas gerais, a solução do sistema (5.143) nos revela que se  $\alpha = 1$  ( $d_1 = d_2$ ) e  $\gamma\theta < \lambda$  temos o estabelecimento da população não-alarmista e crescimento até a capacidade de suporte (vide figura 5.22). Ao passo que se  $\alpha = 1$  ( $d_1 = d_2$ ) e  $\lambda < \gamma\theta$ , a população será levada à extinção (vide figura 5.23).

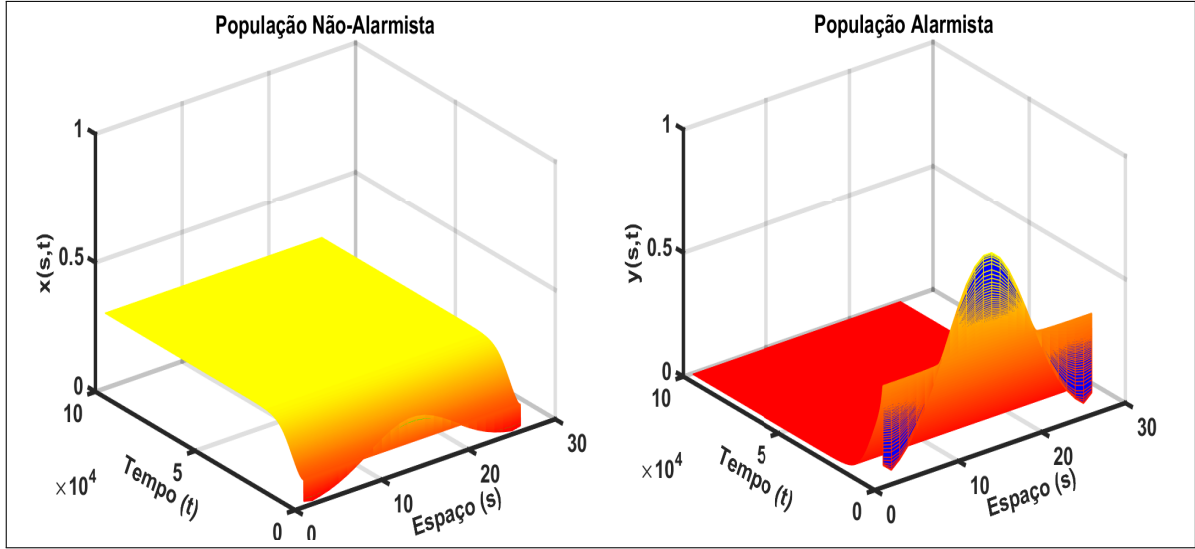


Figura 5.22:  $\gamma\theta < \lambda$  e  $\alpha = 1$

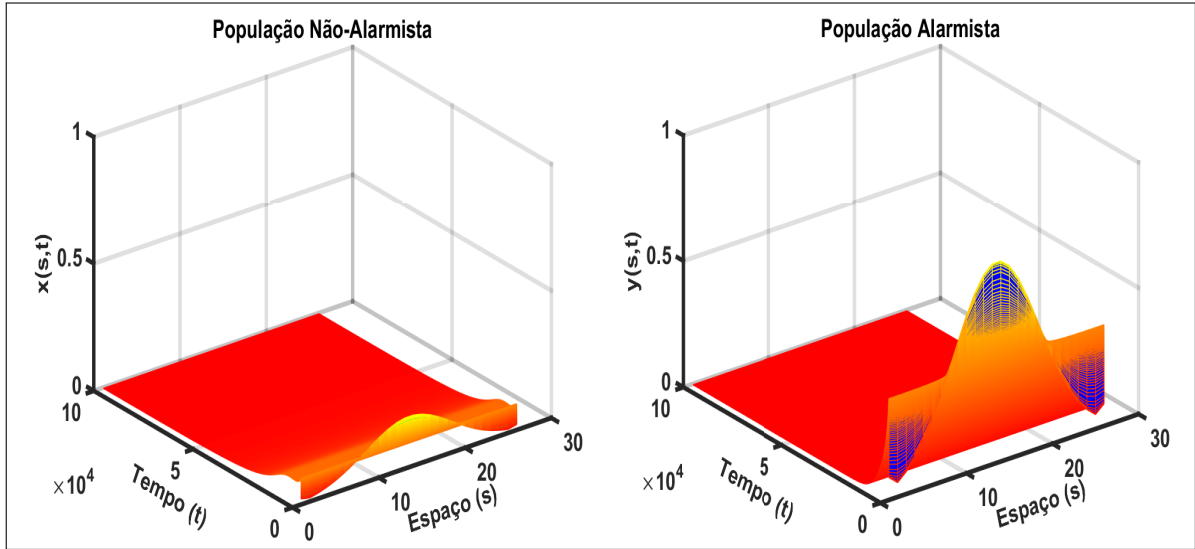


Figura 5.23:  $\lambda < \gamma\theta$  e  $\alpha = 1$

Agora, se  $\alpha \neq 1$  ( $d_1 < d_2$  ou  $d_1 > d_2$ ), podemos resumir a análise do comportamento do modelo, em função dos parâmetros, nas seguintes condições:

1.  $\gamma < 1$  (vantagem não-alarmista).
  - a)  $\gamma\theta < \lambda$  e  $\alpha \neq 1$  estabelecimento da população não-alarmista e crescimento até a capacidade de suporte (vide figura 5.24).
  - b)  $\lambda < \gamma\theta$  e  $\alpha \neq 1$  extinção (vide figura 5.25).
2.  $\gamma > 1$  (vantagem alarmista), estabelecimento da população alarmista e crescimento até a capacidade de suporte.

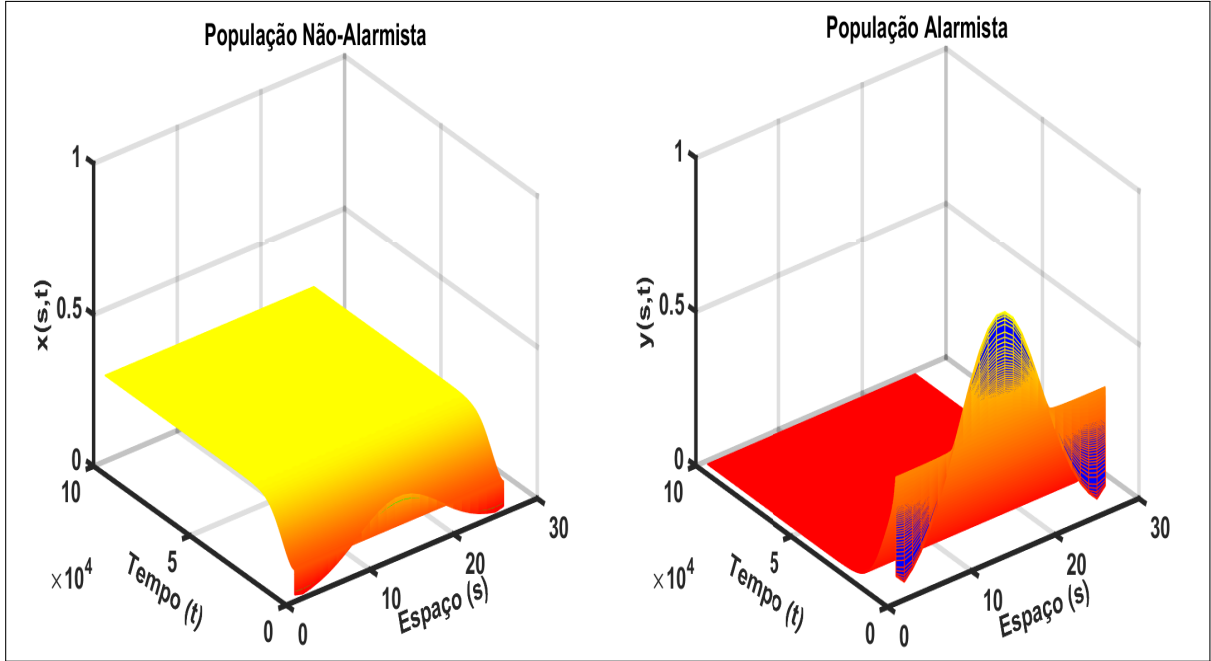


Figura 5.24: Gráficos da solução para  $\alpha \neq 1$  e  $\gamma\theta < \lambda$ . Estabelecimento da população não-alarmista e crescimento até a capacidade de suporte.

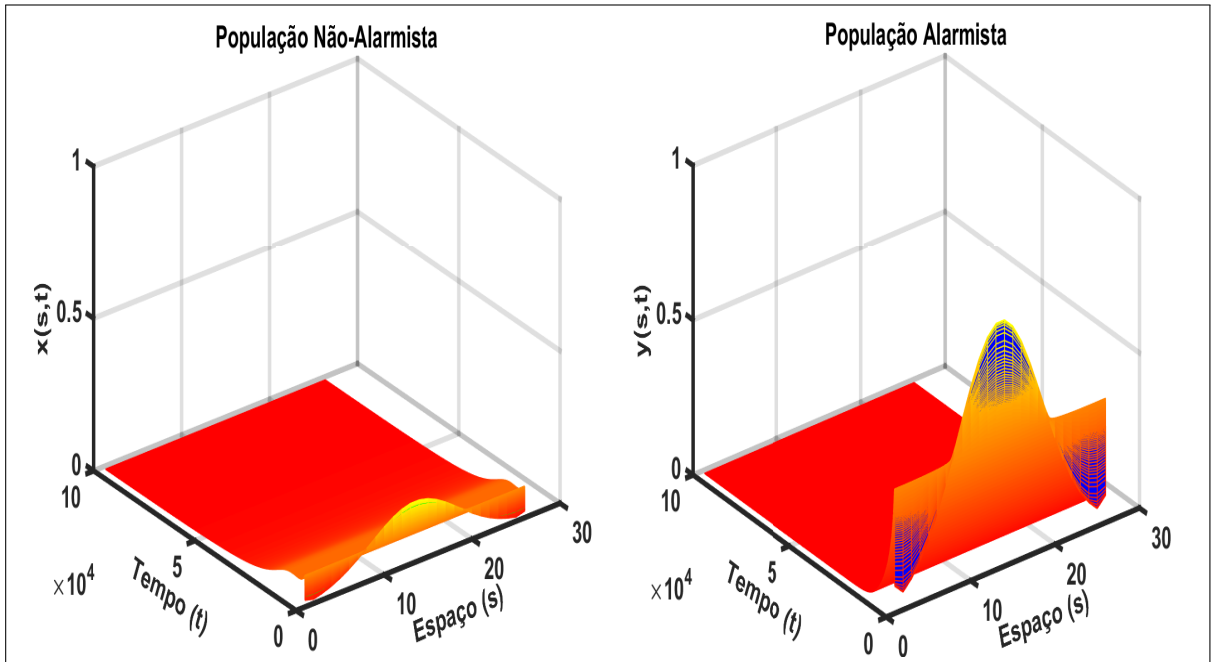


Figura 5.25: Gráficos da solução para  $\alpha \neq 1$  e  $\lambda < \gamma\theta$ . Extinção

Assim, observamos que o parâmetro  $\gamma$  que mede o comportamento mais arriscado no nível individual determina qual tipo de população (alarmista ou não-alarmista) terá maior frequência.

Ainda mais, a combinação/relação dos parâmetros  $\gamma, \lambda, \theta$  e  $\alpha$  indicam se a população irá sobreviver ou não, bem como qual tipo sobreviverá à predação. Como ilustração,

no caso 1.a) os indivíduos não-alarmistas conseguem resistir à taxa máxima de predação devido ao “ganho” obtido por não dar alarme, ao passo que os indivíduos alarmistas são levados à extinção. Por outro lado, no caso 1.b) o “ganho” obtido por não dar o alarme não é suficiente para que os indivíduos não-alarmistas possam resistir à taxa máxima de predação, e portanto, a população será levada à extinção.

Observamos que se o parâmetro  $\gamma$  for menor do que 1 (vantagem não-alarmista) a seleção não favorece o indivíduo alarmista, ou seja, o fato de que os indivíduos não-alarmistas têm um benefício maior do que os alarmistas e, por estarem em competição com estes últimos, os levam à extinção. Dessa forma, os resultados das simulações do nosso modelo divergem da situação proposta por Trivers:

It does not matter that in giving a warning call the caller is helping its non-calling neighbors more than it is helping itself. What counts is that it outcompetes conspecifics from areas in which no one is giving warning calls. The non-calling neighbors of the caller (or their offspring) will soon find themselves in an area without any caller and will be selected against relative to birds in an area with callers. The caller, by definition, is always in an area with at least one caller. If we assume that two callers are preferable to one, and so on, then selection will favor the spread of the warning-call genes. Note that this model depends on the concept of open groups, whereas "group selection" (Wynne-Edwards, 1962) depends partly on the concept of closed groups (Trivers, 1971).

Uma vez que, os resultados obtidos a partir do nosso modelo não corroboram com as conclusões de Trivers, torna-se razoável pensarmos em uma outra configuração, talvez mais realista, na qual a população em estudo esteja inserida em uma região bidimensional heterogênea, de forma que as condições de mobilidade sejam afetadas pelo meio, ou seja, situação em que os coeficientes de difusão não são constantes.

Tomar configurações desse tipo se faz pertinente, pois, chamados de alarme podem fazer com que indivíduos fujam em massa. Como por exemplo, sinais de alerta provocam patos vermelhos comuns a voarem juntos, podendo assim, confundir o predador. Esse tipo de alarme ocorre mais frequentemente nas margens rochosas, onde a visão é obstruída, do que nas salinas planas onde a visibilidade é maior (Caro, 2005).

## 6 Considerações Finais

Este trabalho se constituiu em uma oportunidade de rever, adquirir e solidificar conhecimentos básicos em matemática aplicada e aplicar esses conhecimentos na compreensão do problema de chamado de alarme.

Um dos objetivos deste trabalho era investigar se a distribuição espacial modificaria as relações de seleção entre indivíduos alarmistas e não-alarmistas, conforme sugerido por Trivers. “If we assume that two callers are preferable to one, and so on, then selection will favor the spread of the warning-call genes” (Trivers, 1971). Ou seja, a seleção favoreceria indivíduos alarmistas apesar da vantagem ser dos indivíduos não-alarmistas.

Contudo, em nosso modelo (unidimensional) as simulações indicam que em situações de vantagens não-alarmistas  $\gamma < 1$  os indivíduos alarmistas são levados à extinção, ou seja, não há a possibilidade de coexistência entre alarmistas e não-alarmistas. A única situação em que os indivíduos alarmistas são favorecidos pela seleção é quando tomamos o parâmetro  $\gamma > 1$ , ao contrário do previsto por Trivers (1971) ao propor que a seleção favoreceria o indivíduo alarmista mesmo em situações de vantagens não-alarmistas. Em linhas gerais, qualitativamente, os resultados obtidos não diferem dos encontrados por Assis e Malavazi (2015).

Algumas questões não abordadas diz respeito ao caso em que os coeficientes de difusão não sejam constantes, bem como o caso de distribuição espacial bi-dimensional em uma região heterogênea, ou seja, situação em que o meio interfere na dinâmica da população. Essa abordagem fica reservada para trabalhos futuros.

## Referências Bibliográficas

- Assis, R. A. e Malavazi, M. C. (2015). Modelos de seleção natural em diferentes níveis hierárquicos: indivíduo-população. *Biomatemática, IMECC-UNICAMP*, 25:75–94.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações Diferenciais Com Aplicações*. Harbra, São Paulo.
- Boeger, W. A. (2009). *O Tapete de Penélope: o relacionamento entre as espécies e a evolução orgânica*. Paradidáticos. Série evolução. Editora Unesp, São Paulo.
- Browne, J. (2011). *Charles Darwin: O Poder do Lugar*. Editora Unesp, São Paulo.
- Burden, R. e Faires, J. D. (2008). *Análise Numérica*. Cengage-Learning, São Paulo, 8 edition.
- Carmo, V. A., Bizzo, N., e Martins, L. A. P. (2009). Alfred Russel Wallace e o princípio de seleção natural. *Filosofia e História da Biologia - ABFHiB*, 4:209–233.
- Caro, T. (2005). *Antipredator Defenses in Birds and Mammals*. Interspecific Interactions. University of Chicago Press.
- Castro Jr., A. A. (2009). *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*. (Notas de Aula), IMPA, Rio de Janeiro.
- Charnov, E. L. e Krebs, J. R. (1975). The evolution of alarm calls: altruism or manipulation? *The American Naturalist*, 109:107–112.
- Cremasco, M. A. (2015). *Fundamentos de transferência de massa*. Blucher, São Paulo, 3 edition.
- Cunha, M. C. (2000). *Métodos Numéricos*. Editora da Unicamp, Campinas-SP, 2 edition.

- Curio, E. (1976). *The Ethology of Predation*. Zoophysiology and Ecology-vol. 7. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition.
- Darwin, C. (1887). *Autobiography: The Life and Letters of Charles Darwin - Volume I*. John Murray, London, edited by Francis Darwin.
- Darwin, C. e Wallace, A. R. (1858). On the tendency of species to form varieties; and on the perpetuation of varieties and species by natural means of selection. *Journal of the Proceedings of the Linnean Society: Zoology*, 3:45–62.
- Doering, C. I. e Lopes, A. O. (2005). *Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro.
- Figueiredo, D. (2010). *Equações Diferenciais Aplicadas*. IMPA, Rio de Janeiro, 2 edition.
- Futuyma, D. J. (2002). *Biologia Evolutiva*. FUNPEC, Ribeirão Preto - SP.
- Gear, C. (1971). *Numerical initial-value problems in ordinary differential equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Geromel, J. e Korogui, R. H. (2011). *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*. Blucher, São Paulo.
- Gould, S. J. (1999). *Darwin e os Grandes Enigmas da Vida*. Martins Fontes, São Paulo, 2 edição.
- Harrison, D. (1973). Undamped oscillations occurring in continuous cultures of bacteria. In Chance, B., Ghosh, A. K., Pye, E. K., e Hess, B., editors, *Biological and Biochemical Oscillators*, páginas 399 – 410. Academic Press.
- Heath, M. T. (1997). *Scientific Computing: An Introductory Survey, Second Edition*. The McGraw-Hill Companies, Inc., 2nd edition.
- Hobbie, R. K. e Roth, B. J. (2007). *Intermediate Physics for Medicine and Biology*. Springer-Verlag, New York, 4 edition.
- Hollén, L. I. e Radford, A. N. (2009). The development of alarm call behaviour in mammals and birds. *Animal Behaviour*, 78:791–800.

- Jones, D. A. (2016). *Math 275: Ordinary Differential Equations*. (Class Notes), Arizona State University-ASU, Department of Mathematics, Tempe, AZ.
- Keshet, L. (2005). *Mathematical Models in Biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Lima, S. L. (1998). Nonlethal effects in the ecology of predator-prey interactions: What are the ecological effects of anti-predator decision-making? *BioScience*, 48(1):25–34.
- Meuthen, D., Baldauf, S. A., e Thünken, T. (2012). Evolution of alarm cues: a role for kin selection? *F1000Research*.
- Møller, A. (1988). False alarm calls as a means of resource usurpation in the great tit *parus major*. *Ethology*, 79(1):25–30.
- Morton, E. S. e Shalter, M. D. (1977). Vocal response to predators in pair-bonded carolina wrens. *The Condor, American Ornithological Society*, 79(2):222–227.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications, Third Edition*, vol. 18 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, NY, USA,.
- Okasha, S. (2001). Why won't the group selection controversy go away? *British Journal of Philosophy of Science*, 52:25–50.
- Okubo, A. e Levin, S. A. (2013). *Diffusion and ecological problems: modern perspectives*, volume 14. Springer Science & Business Media.
- Pigliucci, M. (2008). What, if anything, is an evolutionary novelty? *Philosophy of Science Association.*, (75):887–898.
- Potter, M. C., Wiggert, D. C., Hondzo, M., e Shih, T. I. P. (2004). *Mecânica dos Fluidos*. Pioneira Thomson Learning, São Paulo.
- Ridley, M. (2006). *Evolução*. Artmed, Porto Alegre.
- Ruggiero, M. A. G. e Lopes, V. L. R. (1996). *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Makron Books, São Paulo, 2 edition.



- Santana, L. A. R. (2003). *Algumas Considerações Teóricas sobre a Persistência de Espécies em Meios Heterogêneos*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.
- Sherman, P. W. (1977). Nepotism and the evolution of alarm calls. *Science, N.Y.*, 197(4310):1246–1253.
- Smith, J. M. (1965). The evolution of alarm calls. *The American Naturalist*, 99:59–63.
- Sotomayor, J. M. (1979). *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro.
- Strikwerda, J. C. (2004). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Second Edition*. SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Taylor, R. J., Balph, D. F., e Balph, M. H. (1990). The evolution of alarm calling: a cost-benefit analysis. *Animal Behaviour*, 39(5):860 – 868.
- Trivers, R. L. (1971). The evolution of reciprocal altruism. *The Quarterly Review of Biology*, 46(1):35–57.
- Wagner, G. e Lynch, V. J. (2010). Evolutionary novelties. *Current Biology*, 20(2):R48–R52.
- Wilson, R. A. (2006). Levels of selection. In Matthen, M., Stephens, C., Dov M. Gabbay, P. T., e Woods, J., editors, *Handbook of the Philosophy of Science*, páginas 155–175. Elsevier, New York.